I

〔解答〕

(1)	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$		
	7	2	0		
(2)	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	
	2	2	6	3	
(3)	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$	$\boxed{12}$
	6	7	1	8	0

〔解説〕

(1)

太郎さんが袋Aを選ぶ確率，および袋Bを選ぶ確率はいずれも$\frac{1}{2}$である。そして太郎さんが当たりくじを引く事象は，以下の排反な2つの場合に分かれる。

[1] 太郎さんが袋Aを選ぶ場合

この場合の確率は$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{10}=\frac{1}{4}$である。

[2] 太郎さんが袋Bを選ぶ場合

この場合の確率は$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10}=\frac{1}{10}$である。

以上[1], [2]より，求める確率は

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{10}=\frac{7}{20}$$

である。

(2)

太郎さんが当たりくじを引く事象をA，花子さんが当たりくじを引く事象をCとする。このとき，求める条件付き確率は$P_A(C)=\frac{P(A\cap C)}{P(A)}$である。(1)の結果より$P(A)=\frac{7}{20}$である。また，2人とも当たりくじを引く事象$A\cap C$は以下の排反な2通りの場合に分けられる。

[1] 太郎さんが袋Aを選ぶ場合

花子さんが袋Aの残り9本のくじの中から当たりくじ4本のいずれかを引く場合だから，その確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{1}{9}$$

と求まる。

[2] 太郎さんが袋Bを選ぶ場合

花子さんが袋Bの残り9本のくじの中から当たりくじ1本を引く場合だから，その確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{90}$$

と求まる。

以上[1], [2]より，確率$P(A\cap C)$は

$$P(A\cap C)=\frac{1}{9}+\frac{1}{90}=\frac{11}{90} \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

となるから，求める条件付き確率は

$$P_A(C)=\frac{P(A\cap C)}{P(A)}=\frac{11}{90}\cdot\frac{20}{7}=\frac{22}{63}$$

である。

(3)

求める確率は$P(C)$である。ここで，太郎さんがはずれくじを引く事象をBとすると，A, Bは互いに排反な事象だから

$$P(C)=P(A\cap C)+P(B\cap C)$$

となる。ここで，太郎さんがはずれくじを引いて花子さんが当たりくじを引く事象$B\cap C$は以下の排反な2通りの場合に分けられる。

[1] 太郎さんが袋Aを選ぶ場合

太郎さんが袋Aからはずれくじ，花子さんが袋Bから当たりくじを引く場合だから，その確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{10}=\frac{1}{20}$$

と求まる。

[2] 太郎さんが袋Bを選ぶ場合

太郎さんが袋Bからはずれくじ，花子さんが袋Aからあたりくじを引く場合だから，その確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{5}{10}=\frac{1}{5}$$

と求まる。

以上[1], [2]より，確率$P(B\cap C)$は

$$P(B\cap C)=\frac{1}{20}+\frac{1}{5}=\frac{1}{4} \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

と求まる。①, ②より，求める確率は

$$\begin{aligned} P(C)&=P(A\cap C)+P(B\cap C)\\ &=\frac{11}{90}+\frac{1}{4}\\ &=\frac{67}{180} \end{aligned}$$

である。

Ⅱ

〔解答〕

(1)	$\boxed{13}$	$\boxed{14}$	$\boxed{15}$	$\boxed{16}$	$\boxed{17}$
	2	3	7	0	9
(2)	$\boxed{18}$	$\boxed{19}$	$\boxed{20}$		
	2	8	3		

〔解説〕

(1)

放物線 C の式は

$$y=-2x^2+4ax-a^2-4a+10$$
$$=-2(x-a)^2+a^2-4a+10$$

と平方完成できるから、頂点の座標は $\left(a,\ a^2-4a+10\right)$ だと分かる。よって，$a=\dfrac{2}{3}$ のとき

頂点の x 座標：$x=\dfrac{2}{3}$

頂点の y 座標：$y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-4\cdot\dfrac{2}{3}+10=\dfrac{70}{9}$

であるから，頂点の座標は $\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{70}{9}\right)$ である。

(2)

放物線 C と x 軸の交点の x 座標は，2 次方程式

$$2x^2-4ax+a^2+4a-10=0 \qquad \cdots①$$

の実数解として求まる。①の判別式を D とおくと

$$\frac{D}{4}=(-2a)^2-2\left(a^2+4a-10\right)$$
$$=2a^2-8a+20$$
$$=2(a-2)^2+12 \qquad \cdots②$$

である。a は実数だから常に $D>0$ が成り立ち，①は必ず異なる 2 つの実数解を持つ。これらの解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと

$$2x^2-4ax+a^2+4a-10=2(x-\alpha)(x-\beta) \qquad \cdots③$$

と因数分解できる。また，①を解くと

$$\alpha=\frac{4a-\sqrt{D}}{4},\ \beta=\frac{4a+\sqrt{D}}{4}$$

となる。したがって，②より

$$\beta-\alpha=\frac{\sqrt{D}}{2}=\sqrt{\frac{D}{4}}=\sqrt{2(a-2)^2+12} \qquad \cdots④$$

と求まる。放物線 C は上に凸の放物線だから，放物線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を S とすると

$$S=\int_\alpha^\beta\left(-2x^2+4ax-a^2-4a+10\right)dx$$
$$=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx \quad (\because ③)$$
$$=\frac{2}{6}(\beta-\alpha)^3$$
$$=\frac{1}{3}\left\{2(a-2)^2+12\right\}^{\frac{3}{2}} \quad (\because ④)$$

となる。よって，S は $a=2$ のとき最小値

$$S=\frac{1}{3}\cdot 12^{\frac{3}{2}}=8\sqrt{3}$$

をとる。

Ⅲ

〔解答〕

(1)	21	22			
	3	3			
(2)	23	24	25		
	3	2	3		
(3)	26	27	28	29	30
	3	4	3	3	4
(4)	31	32	33	34	
	3	3	1	6	

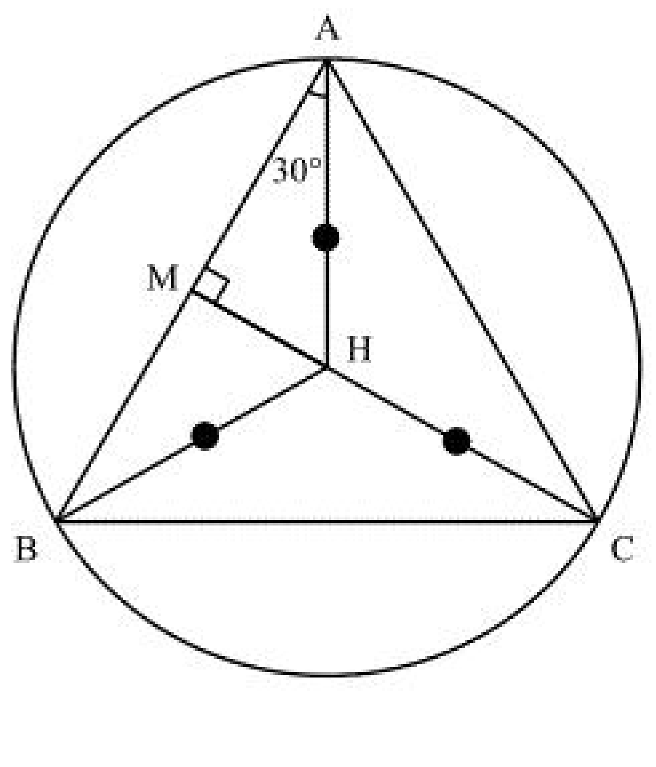
〔解説〕

(1)

△OAH，△OBH，△OCH について，$OA = OB = OC$，$\angle OHA = \angle OHB = \angle OHC = 90°$，OH は共通だから直角三角形の合同条件より△OAH ≡ △OBH ≡ △OCH が成り立つ。したがって $AH = BH = CH$ だから，点 H は△ABC の外心となる。また，$AB = BC = CA$ より△ABC は正三角形だから，辺 AB の中点を点 M とおくと $AB \perp MH$ が成立する。そして，点 H は△ABC の内心でもあるから

$$\angle HAB = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\cdot 60° = 30°$$

となる。したがって，以下のように図示できる。



上図より，△AMH において

$$AM = AH\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}AH$$

である。よって，

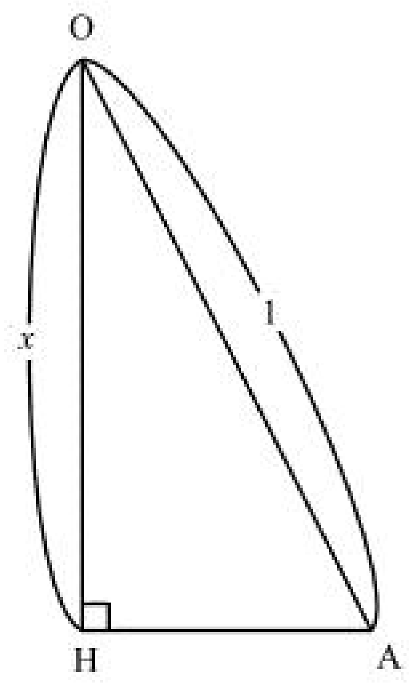
$$AB = 2AM = \sqrt{3}AH$$

$$\therefore \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

と求まる。

(2)

△OAH は以下のように図示できる。



上図より，△OAH で三平方の定理より

$$AH^2 = OA^2 - OH^2 = 1 - x^2$$

である。よって，(1)の結果より

$$AB^2 = 3AH^2 = 3\left(1 - x^2\right) = -3x^2 + 3$$

と求まる。

(3)

(1)の結果より

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot \sin 60°$$

$$= \frac{1}{2}\cdot AB^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\ (\because AB = AC)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(1 - x^2\right)$$

である。よって，

$$V = \frac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot OH$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(1 - x^2\right)\cdot x$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{4}x^3 + \frac{\sqrt{3}}{4}x$$

と求まる。

(4)

(3)より $V = -\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x^3 - x\right)$ である。ここで，△OHA において三角形の成立条件より

$$0 < OH < OA$$

$$\therefore 0 < x < 1$$

である。したがって V の定義域は $0 < x < 1$ である。V を x で微分すると

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{\sqrt{3}}{4}\left(3x^2 - 1\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{3}x + 1\right)\left(\sqrt{3}x - 1\right)$$

と因数分解できる。以上より，V の増減表は以下のようになる。

x	0	…	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	…	1
$\frac{dV}{dx}$		+	0	−	
V	(0)	↗	$\frac{1}{6}$	↘	(0)

よって，V は $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ のときに最大値 $\frac{1}{6}$ を取る。

IV

〔解答〕

(1)	$\boxed{35}$	$\boxed{36}$
	5	9
(2)	$\boxed{37}$	
	8	
(3)	$\boxed{38}$	$\boxed{39}$
	1	4

〔解説〕

(1)

$$
\begin{aligned}
&1+2+3+\cdots+n=1770\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}n(n+1)=1770\\
&\Leftrightarrow n(n+1)=3540
\end{aligned}
$$

と変形できる。3540 は

$$
\begin{aligned}
3540&=2^4\cdot 5\cdot 59\\
&=59\times 60
\end{aligned}
$$

であるから，$n=59$ である。

(2)

$$
\begin{aligned}
&1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=204\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=204\\
&\Leftrightarrow n(n+1)(2n+1)=1224
\end{aligned}
$$

と変形できる。1224 は

$$
\begin{aligned}
1224&=2^3\cdot 3^2\cdot 17\\
&=8\cdot 9\cdot 17\\
&=8(8+1)(2\times 8+1)
\end{aligned}
$$

であるから，$n=8$ である。

(3)

$$
\begin{aligned}
&n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots+(2n)^2=6895\\
&\Leftrightarrow \left\{1^2+2^2+3^2+\cdots+(2n)^2\right\}-\left\{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2\right\}=6895\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{6}\cdot 2n(2n+1)(4n+1)-\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)=6895\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{6}n(n+1)(14n+1)=6895\\
&\Leftrightarrow n(n+1)(14n+1)=41370
\end{aligned}
$$

と変形できる。41370 は

$$41370=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 197$$

と因数分解でき，

$$2\times 7=14,\ 3\times 5=15,\ 197=14\times 14+1$$

に着目すると

$$14(14+1)(14\times 14+1)=41370$$

であるから，$n=14$ である。