1

〔解答〕

(1)	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	
	1	7	1	8	
(2)	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$
	4	3	1	8	0
(3)	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$	$\boxed{12}$	$\boxed{13}$	
	2	5	4	3	

〔解説〕

(1)

袋A, Bからそれぞれ2個ずつ同時に玉を取り出すとき，4個のうち少なくとも1個が白玉であるという事象は，4個とも赤玉である事象の余事象である。ここで，余事象の起こる確率を考える。Aから赤玉2個を取り出す確率は，

$$\frac{{}_5C_2}{{}_9C_2}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18} \qquad \cdots①$$

となる。また，Bから赤玉2個を取り出す確率は，

$$\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5} \qquad \cdots②$$

となる。これらは，独立な事象であるから，4個とも赤玉である確率は，

$$\frac{5}{18}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{18}$$

である。したがって，4個のうち少なくとも1個が白玉である確率は，

$$1-\frac{1}{18}=\frac{17}{18}$$

である。

(2)

袋の選び方は無作為であるから，それぞれの袋について選ばれる確率は$\frac{1}{2}$である。①より，袋Aを選んで赤玉2個を取り出す確率は，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{18}=\frac{5}{36}$$

である。また，②より，袋Bを選んで赤玉2個を取り出す確率は，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$$

である。袋Aを選ぶ場合と袋Bを選ぶ場合は，互いに排反な事象であるから，求める確率は，

$$\frac{5}{36}+\frac{1}{10}=\frac{43}{180}$$

となる。

(3)

いま，事象Xが起こる確率を$P(X)$と表す。取り出した玉が2個とも赤玉であるという事象をC，無作為に選んだ袋がAであるという事象をDとすると，(2)より，

$$P(C)=\frac{43}{180}$$

である。また，袋Aを選んで赤玉2個を取り出す確率は，(2)より，

$$P(C\cap D)=\frac{5}{36}$$

である。したがって，求める条件付き確率は，

$$P_C(D)=\frac{P(C\cap D)}{P(C)}=\frac{\frac{5}{36}}{\frac{43}{180}}=\frac{25}{43}$$

となる。

$\boxed{2}$

〔解答〕

(1)	$\boxed{14}$	$\boxed{15}$	$\boxed{16}$	$\boxed{17}$	$\boxed{18}$
	4	5	−	4	9
(2)	$\boxed{19}$	$\boxed{20}$	$\boxed{21}$	$\boxed{22}$	$\boxed{23}$
	5	4	−	9	8
(3)	$\boxed{24}$	$\boxed{25}$	$\boxed{26}$	$\boxed{27}$	
	9	4	7	8	

〔解説〕

(1)

真数条件より $x>0$ であることに注意して，$f(x)$ を変形すると，

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\log\frac{x}{\sqrt{e}}\right)\left(\log\frac{x^2}{e^4}\right) \\ &= \left(\log xe^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\log x^2e^{-4}\right) \\ &= \left(\log x-\frac{1}{2}\right)(2\log x-4)\ (\because x>0) \end{aligned}$$

となる。これを微分すると，

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\log x-\frac{1}{2}\right)'(2\log x-4)+\left(\log x-\frac{1}{2}\right)(2\log x-4)' \\ &= \frac{1}{x}\cdot(2\log x-4)+\left(\log x-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{x} \\ &= \frac{1}{x}(4\log x-5) \end{aligned}$$

となる。さらに $f'(x)$ を微分すると，

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{1}{x}\right)'(4\log x-5)+\left(\frac{1}{x}\right)(4\log x-5)' \\ &= -\frac{1}{x^2}\cdot(4\log x-5)+\frac{1}{x}\cdot\frac{4}{x} \\ &= \frac{1}{x^2}(-4\log x+9) \end{aligned}$$

となる。

(2)

定義域 $x>0$ において，$f'(x)=0$ を満たす x は，

$$\begin{aligned} & f'(x)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{x}(4\log x-5)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \log x=\frac{5}{4}\ (\because x>0) \\ \therefore\ & x=e^{\frac{5}{4}} \end{aligned}$$

である。したがって，増減表は以下のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$e^{\frac{5}{4}}$	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	最小	↗

上表より，$f(x)$ は $x=e^{\frac{5}{4}}$ で最小値，

$$\begin{aligned} f\left(e^{\frac{5}{4}}\right) &= \left(\log e^{\frac{5}{4}}-\frac{1}{2}\right)\left(2\log e^{\frac{5}{4}}-4\right) \\ &= \left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(2\cdot\frac{5}{4}-4\right) \\ &= -\frac{9}{8} \end{aligned}$$

をとる。

(3)

定義域 $x>0$ において，$f''(x)=0$ を満たす x は，

$$\begin{aligned} & f''(x)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{x^2}(-4\log x+9)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \log x=\frac{9}{4}\ (\because x>0) \\ \therefore\ & x=e^{\frac{9}{4}} \end{aligned}$$

である。したがって，関数 $f(x)$ の凹凸は以下のようになる。

x	0	$\cdots$	$e^{\frac{9}{4}}$	$\cdots$
$f''(x)$		+	0	−
$f(x)$		下に凸	変曲点	上に凸

上表より，$f(x)$ は $x=e^{\frac{9}{4}}$ で変曲点を持ち，

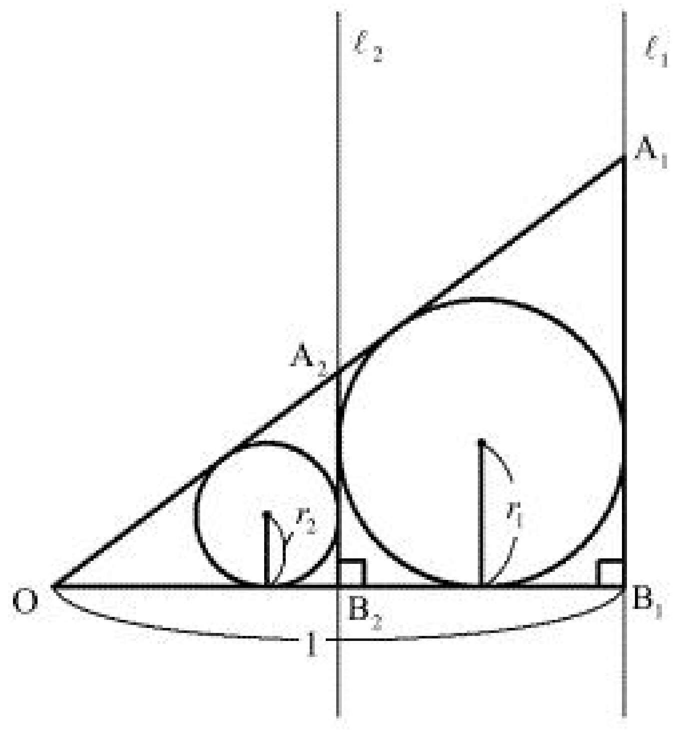
$$\begin{aligned} f\left(e^{\frac{9}{4}}\right) &= \left(\log e^{\frac{9}{4}}-\frac{1}{2}\right)\left(2\log e^{\frac{9}{4}}-4\right) \\ &= \left(\frac{9}{4}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(2\cdot\frac{9}{4}-4\right) \\ &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

であるから，変曲点の座標は $\left(e^{\frac{9}{4}},\ \frac{7}{8}\right)$ である。

3

(1)

以下に，$\triangle \mathrm{OA_1B_1}$，$\triangle \mathrm{OA_2B_2}$およびその内接円を図示する。



上図より，

$$\begin{cases}\angle \mathrm{A_1OB_1} = \angle \mathrm{A_2OB_2} \\ \angle \mathrm{OB_1A_1} = \angle \mathrm{OB_2A_2}\ (=90^\circ)\end{cases}$$

であるから，$\triangle \mathrm{OA_1B_1}$と$\triangle \mathrm{OA_2B_2}$は相似である。いま，$\triangle \mathrm{OA_1B_1}$と$\triangle \mathrm{OA_2B_2}$の相似比を$1:k\ (0<k<1)$とする。$\triangle \mathrm{OA_1B_1}$と$\triangle \mathrm{OA_2B_2}$は点Oを中心として相似であるから，$\triangle \mathrm{OA_1B_1}$の内接円と$\triangle \mathrm{OA_2B_2}$の内接円も点Oを中心として相似であり，その相似比は$1:k$である。したがって，上図より，

$$\mathrm{OB_2} = \mathrm{OB_1} - 2r_1 = 1 - 2r_1$$

であるから，

$$\begin{aligned}&r_1 : r_2 = 1 : k \\ \Leftrightarrow\ & r_1 : r_2 = \mathrm{OB_1} : \mathrm{OB_2} \\ \Leftrightarrow\ & r_1 : r_2 = 1 : (1-2r_1) \\ \therefore\ & r_2 = r_1 - 2r_1^2\end{aligned}$$

となる。

(答) $r_2 = r_1 - 2r_1^2$

(2)

(1)と同様に，

$$r_2 : r_3 = \mathrm{OB_2} : \mathrm{OB_3}$$

であり，

$$\mathrm{OB_3} = \mathrm{OB_2} - 2r_2 = (1-2r_1) - 2r_2 = 1 - 4r_1 + 4r_1^2 = (1-2r_1)^2$$

であるから，$\mathrm{OB_2} \neq 0$より，

$$\frac{r_3}{r_2} = \frac{\mathrm{OB_3}}{\mathrm{OB_2}} = \frac{(1-2r_1)^2}{(1-2r_1)} = 1-2r_1$$

となる。

(答) $\dfrac{r_3}{r_2} = 1-2r_1$

(3)

(1), (2)と同様に，すべての自然数nに対して．$\triangle \mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$と$\triangle \mathrm{OA}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}$は相似であるから，

$$r_n : r_{n+1} = \mathrm{OB}_n : \mathrm{OB}_{n+1}$$

である。ここで，$\mathrm{OB}_{n+1} = \mathrm{OB}_n - 2r_n$であるから，$\mathrm{OB}_n \neq 0$より，

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{\mathrm{OB}_{n+1}}{\mathrm{OB}_n} = 1 - 2\frac{r_n}{\mathrm{OB}_n}$$

であり，$\triangle \mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$と$\triangle \mathrm{OA_1B_1}$は相似であるから，(1)と同様に，

$$\begin{aligned}&r_n : r_1 = \mathrm{OB}_n : \mathrm{OB}_1 \\ \therefore\ & \frac{r_n}{\mathrm{OB}_n} = r_1\end{aligned}$$

である。以上より，

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = 1-2r_1$$

となる。

(答) $\dfrac{r_{n+1}}{r_n} = 1-2r_1$

(4)

(1), (2), (3)より，すべての自然数nに対して$\dfrac{r_{n+1}}{r_n} = 1-2r_1$が成立するから，$\dfrac{r_2}{r_1}, \dfrac{r_3}{r_2}, \cdots, \dfrac{r_n}{r_{n-1}}$の辺々をすべてかけ合わせることで，

$$\begin{aligned}&\frac{r_2}{r_1}\cdot\frac{r_3}{r_2}\cdot\cdots\cdot\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}\cdot\frac{r_n}{r_{n-1}} = (1-2r_1)(1-2r_1)\cdots(1-2r_1)(1-2r_1) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{r_n}{r_1} = (1-2r_1)^{n-1} \\ \therefore\ & r_n = r_1(1-2r_1)^{n-1}\end{aligned}$$

となる。

(答) $r_n = r_1(1-2r_1)^{n-1}$

(5)

(4)の結果は(1), (2)より$n=1, 2$のときも成り立つから，すべての自然数nに対して，

$$S_n = \pi r_n^2 = \pi r_1^2 \left\{(1-2r_1)^2\right\}^{n-1}$$

である。ここで，$r_1 > r_2$であるから，(1)より，

$$0 < \frac{r_2}{r_1} = 1-2r_1 < 1$$

となり，$\left|(1-2r_1)^2\right| < 1$である。したがって，無限等比級数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$は収束し，その値は，

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi r_1^2}{1-(1-2r_1)^2} = \frac{\pi r_1^2}{4r_1 - 4r_1^2} = \frac{\pi r_1}{4(1-r_1)}$$

となる。

(答) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi r_1}{4(1-r_1)}$

4

(1)

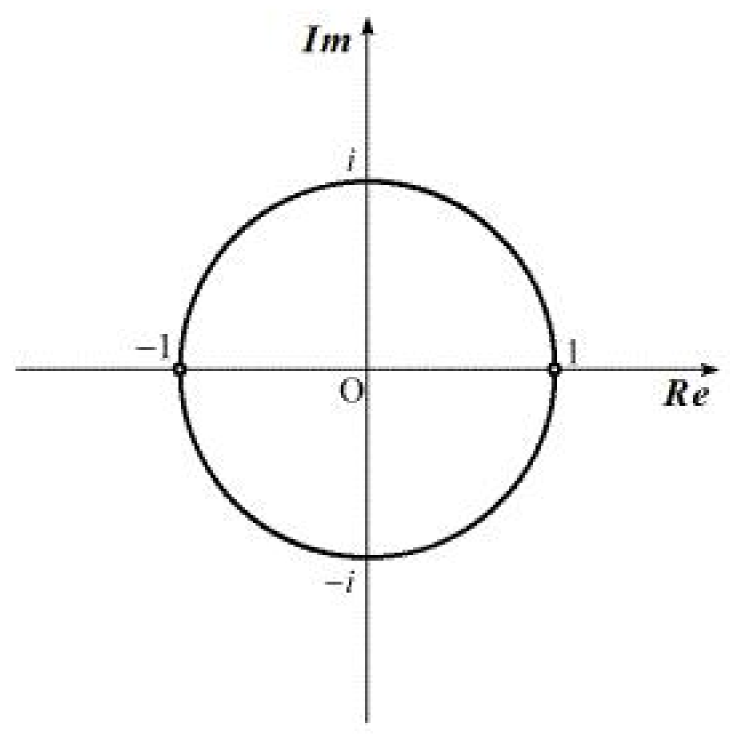
問題文より，

$$AB=\left|z^2-z\right|=\left|z(z-1)\right|=|z|\cdot|z-1|$$
$$BC=\left|z^3-z^2\right|=\left|z^2(z-1)\right|=|z|^2\cdot|z-1|$$

である。いま，z は実数ではないから，$z\neq 0, 1$ すなわち $|z|\neq 0, |z-1|\neq 0$ であることに注意すると，

$$AB=BC$$
$$\Leftrightarrow |z|\cdot|z-1|=|z|^2\cdot|z-1|$$
$$\Leftrightarrow |z|=1\ (\because |z|\neq 0, |z-1|\neq 0)$$

となる。したがって，z は実数ではないから $z=1, -1$ を除く単位円上を動く。図示すると以下の実線部のようになる。ただし，白丸と軸($z=i, -i$ は除く)は含まない。



(答) 前図

(2)

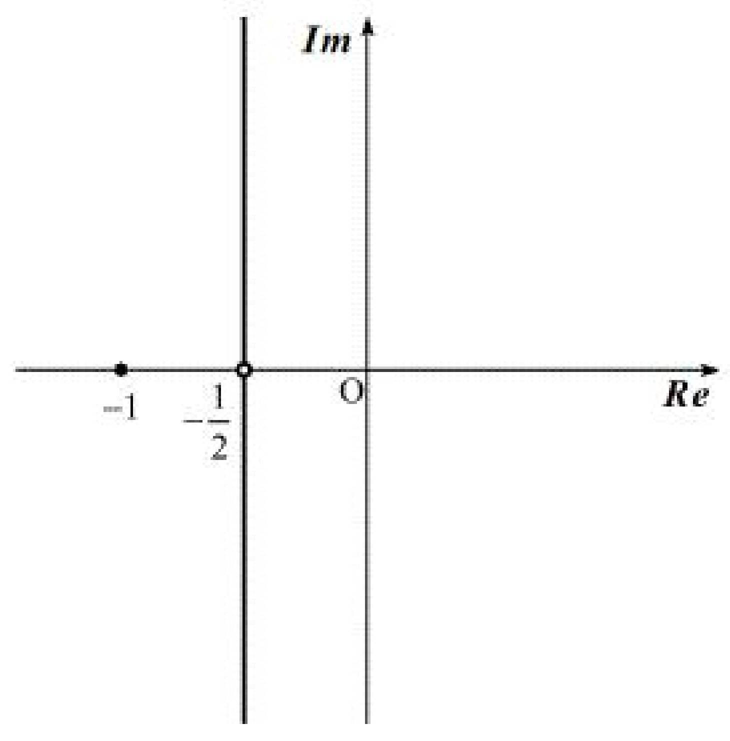
問題文より，

$$AC=\left|z^3-z\right|=\left|z(z-1)(z+1)\right|=|z|\cdot|z-1|\cdot|z+1|$$
$$BC=\left|z^3-z^2\right|=\left|z^2(z-1)\right|=|z|^2\cdot|z-1|$$

であるから

$$AC=BC$$
$$\Leftrightarrow |z|\cdot|z-1|\cdot|z+1|=|z|^2\cdot|z-1|$$
$$\Leftrightarrow |z+1|=|z|\ (\because |z|\neq 0, |z-1|\neq 0)$$

となる。これより，点0と点 z の距離と，点 -1 と点 z の距離が等しいことがわかる。したがって，z は実数ではないから $z=-\frac{1}{2}$ を除く点0と点 -1 の垂直二等分線上を動く。図示すると以下の実線部のようになる。ただし，白丸と黒丸，軸は含まない。



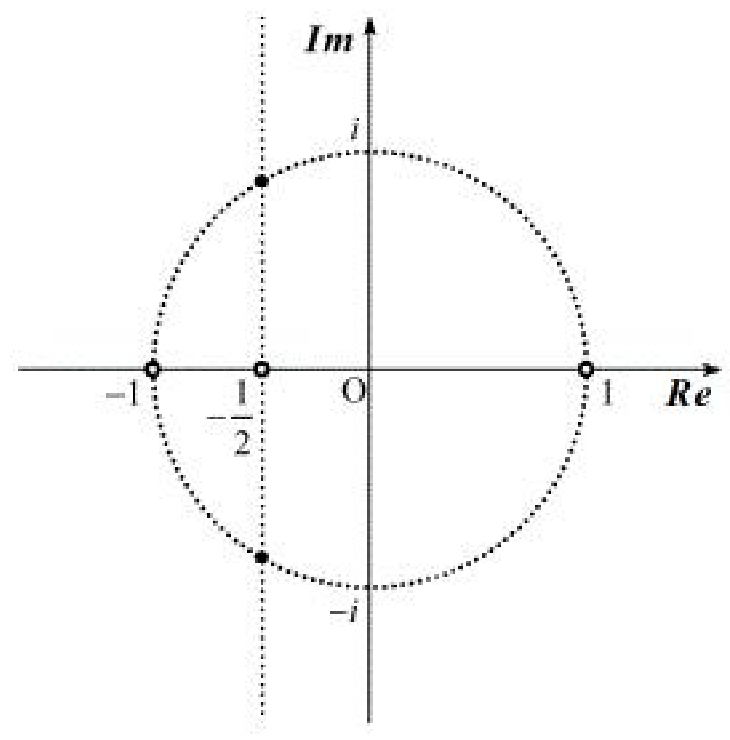
(答) 前図

(3)

△ABC が正三角形となるとき，

AB = BC = AC ⇔「AB = BC かつ AC = BC」

が成り立つ。したがって，(1), (2)における z の存在範囲の共通部分が，条件を満たす z のとりうる値の範囲である。以下に，(1), (2)における z の存在範囲の共通部分を黒丸で示す。ただし，点線と白丸，軸は含まない。



いま，実数 x, y を用いて $z=x+yi$ と表すと，上図より，

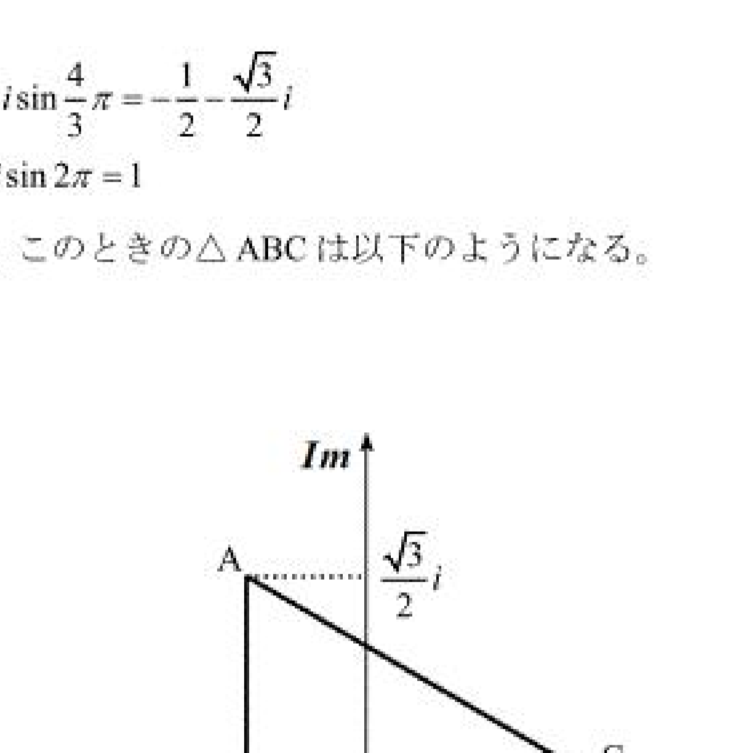
$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$
$$\therefore x=-\frac{1}{2},\ y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

となるから，条件を満たす z は $z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ である。$z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ を極形式で表すと，

$z=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$ であるから，ド・モアブルの定理より，

$$z^2=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z^3=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$$

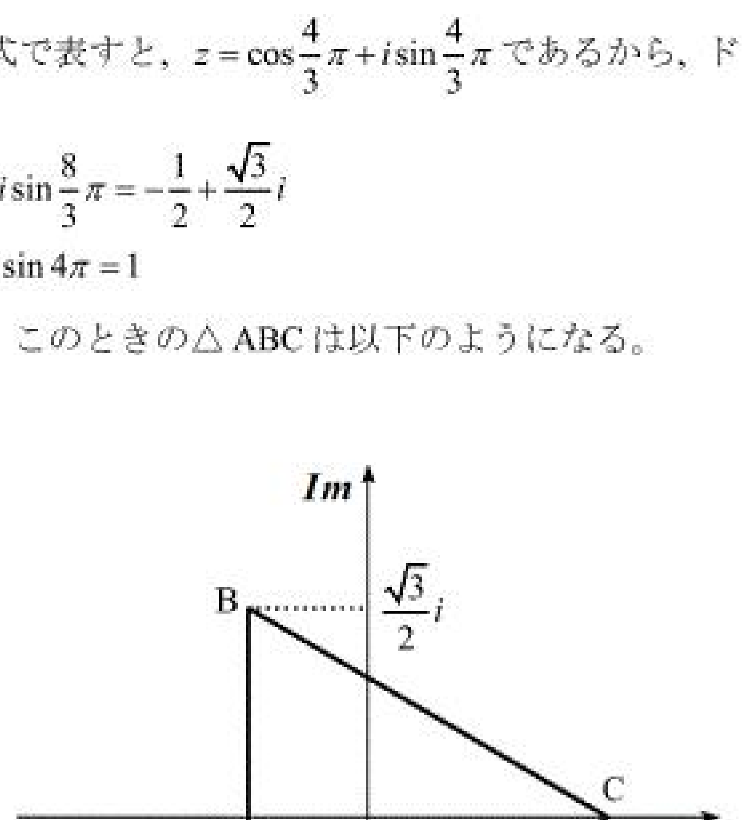
となる。したがって，このときの△ABC は以下のようになる。



$z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ を極形式で表すと，$z=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi$ であるから，ド・モアブルの定理より，

$$z^2=\cos\frac{8}{3}\pi+i\sin\frac{8}{3}\pi=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z^3=\cos 4\pi+i\sin 4\pi=1$$

となる。したがって，このときの△ABC は以下のようになる。



(答) $z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，前図

$\boxed{5}$

(1)

曲線 C_1 について,

$$0 \leqq x < \frac{\pi}{2} \text{ のとき, } |\cos x| = \cos x$$

$$\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi \text{ のとき, } |\cos x| = -\cos x$$

であり, 曲線 C_2 について,

$y = \cos\frac{x}{2}$ のグラフは $y = \cos x$ のグラフを原点を中心に x 軸方向に 2 倍したもの

である。また, 2 曲線の交点の x 座標は, 倍角の公式を用いると,

$$0 \leqq x < \frac{\pi}{2} \text{ のとき, } \cos x = \cos\frac{x}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \cos\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(2\cos\frac{x}{2} + 1\right)\left(\cos\frac{x}{2} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2},\ 1$$

$$\therefore x = 0 \quad \left(\because 0 \leqq \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}\right)$$

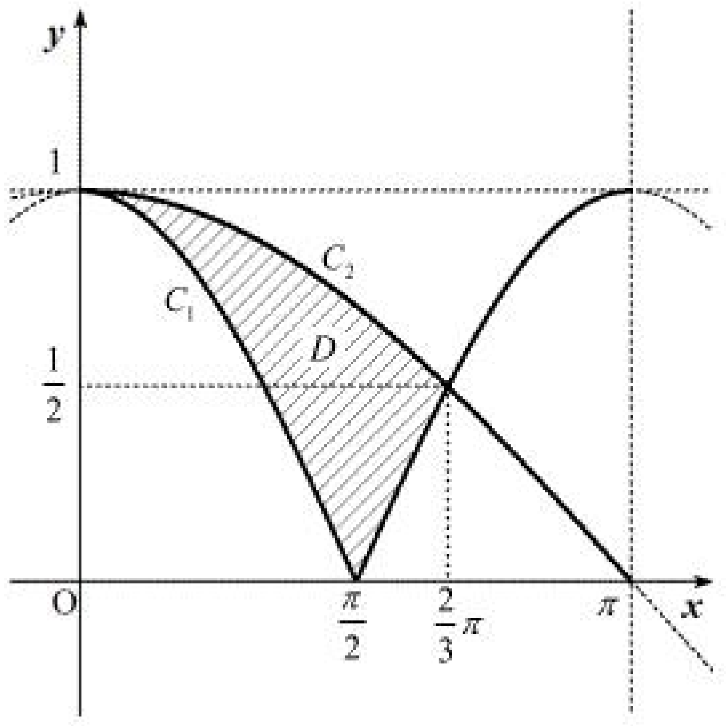
$$\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi \text{ のとき, } -\cos x = \cos\frac{x}{2} \Leftrightarrow -2\cos^2\frac{x}{2} + 1 = \cos\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(2\cos\frac{x}{2} - 1\right)\left(\cos\frac{x}{2} + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} = -1,\ \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{2}{3}\pi \quad \left(\because \frac{\pi}{4} \leqq \frac{x}{2} \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

であるから, 交点の座標は $(0, 1), \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{2}\right)$ となる。したがって, 図形 D は以下の図の斜線部のようになる。



(答) 前図

(2)

(1)の結果および図より, 図形 D の面積は,

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\left(\cos\frac{x}{2} - |\cos x|\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos x\right)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi}\left(\cos\frac{x}{2} + \cos x\right)dx$$

$$= \left[2\sin\frac{x}{2} - \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[2\sin\frac{x}{2} + \sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi}$$

$$= \left\{\left(2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) - (0 - 0)\right\} + \left\{\left(2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)\right\}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - 2$$

と求められる。

(答) $\frac{3\sqrt{3}}{2} - 2$

(3)

(1)の結果および図より, 図形 D を x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積は,

$$\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\left\{\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2 - |\cos x|^2\right\}dx = \pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\left\{\frac{1}{2}(1 + \cos x) - \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\right\}dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\} - \frac{\pi}{2}\left(0 - \frac{1}{2}\cdot 0\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$$

と求められる。

(答) $\frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$