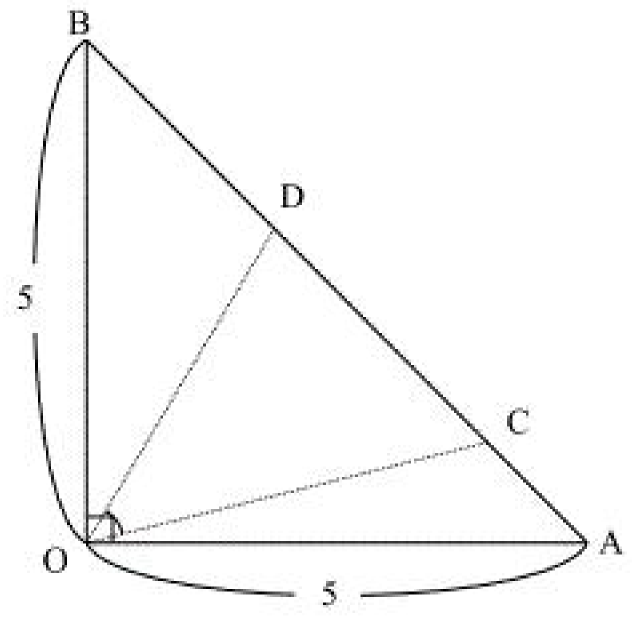
$\boxed{1}$

〔解答〕

$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	$\boxed{10}$
1	7	1	4	3	5	1	5	8	2

〔解説〕



$\angle \mathrm{OAB}\left(=\angle \mathrm{OAC}\right)=\angle \mathrm{OBA}=45^\circ$ であることに注意して，$\triangle \mathrm{OAC}$ について余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{OC}^2&=\mathrm{AO}^2+\mathrm{AC}^2-2\mathrm{AO}\cdot\mathrm{AC}\cos\angle \mathrm{OAC}\\&=25+2-2\cdot 5\cdot\sqrt{2}\cos 45^\circ\\&=17\end{aligned}$$

$$\therefore \mathrm{OC}=\sqrt{17}\ (\because \mathrm{OC}>0)$$

が得られる。また，$\triangle \mathrm{OAC}$ について正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{OC}}{\sin\angle \mathrm{OAC}}=\frac{\mathrm{AC}}{\sin\angle \mathrm{AOC}}$$
$$\Leftrightarrow \sin\angle \mathrm{AOC}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{OC}}\sin\angle \mathrm{OAC}$$
$$\Leftrightarrow \sin\angle \mathrm{AOC}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\sin 45^\circ$$
$$\therefore \sin\angle \mathrm{AOC}=\frac{1}{\sqrt{17}}$$

となるから，

$$\sin^2\angle \mathrm{AOC}+\cos^2\angle \mathrm{AOC}=1$$
$$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{\tan^2\angle \mathrm{AOC}}=\frac{1}{\sin^2\angle \mathrm{AOC}}$$
$$\Leftrightarrow \tan^2\angle \mathrm{AOC}=\frac{1}{\dfrac{1}{\sin^2\angle \mathrm{AOC}}-1}$$
$$\Leftrightarrow \tan^2\angle \mathrm{AOC}=\frac{1}{16}$$
$$\therefore \tan\angle \mathrm{AOC}=\frac{1}{4}\ \left(\because 0^\circ<\angle \mathrm{AOC}<90^\circ\right)$$

である。さらに，

$$\angle \mathrm{BOD}=\angle \mathrm{AOB}-\left(\angle \mathrm{AOC}+\angle \mathrm{COD}\right)=45^\circ-\angle \mathrm{AOC}$$

であるから，加法定理より，

$$\begin{aligned}\tan\angle \mathrm{BOD}&=\tan\left(45^\circ-\angle \mathrm{AOC}\right)\\&=\frac{\tan 45^\circ-\tan\angle \mathrm{AOC}}{1+\tan 45^\circ\tan\angle \mathrm{AOC}}\\&=\frac{1-\dfrac{1}{4}}{1+1\cdot\dfrac{1}{4}}\\&=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

である。これより，

$$\sin^2\angle \mathrm{BOD}+\cos^2\angle \mathrm{BOD}=1$$
$$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{\tan^2\angle \mathrm{BOD}}=\frac{1}{\sin^2\angle \mathrm{BOD}}$$
$$\Leftrightarrow \sin^2\angle \mathrm{BOD}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{\tan^2\angle \mathrm{BOD}}}$$
$$\Leftrightarrow \sin^2\angle \mathrm{BOD}=\frac{9}{34}$$
$$\therefore \sin\angle \mathrm{BOD}=\frac{3}{\sqrt{34}}\ \left(\because 0^\circ<\angle \mathrm{BOD}<180^\circ\right)$$

が得られ，

$$\angle \mathrm{BDO}=180^\circ-\left(\angle \mathrm{BOD}+\angle \mathrm{OBD}\right)=135^\circ-\angle \mathrm{BOD}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\sin\angle \mathrm{BDO}&=\sin\left(135^\circ-\angle \mathrm{BOD}\right)\\&=\sin 135^\circ\cos\angle \mathrm{BOD}-\sin\angle \mathrm{BOD}\cos 135^\circ\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\angle \mathrm{BOD}\left(\frac{1}{\tan\angle \mathrm{BOD}}+1\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{\sqrt{34}}\cdot\left(\frac{5}{3}+1\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{\sqrt{34}}\cdot\frac{8}{3}\\&=\frac{4}{\sqrt{17}}\end{aligned}$$

が得られる。以上より，$\triangle \mathrm{OBD}$ について，正弦定理から，

$$\frac{\mathrm{BD}}{\sin\angle \mathrm{BOD}}=\frac{\mathrm{OB}}{\sin\angle \mathrm{BDO}}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{BD}=\frac{\sin\angle \mathrm{BOD}}{\sin\angle \mathrm{BDO}}\mathrm{OB}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{BD}=\frac{\dfrac{3}{\sqrt{34}}}{\dfrac{4}{\sqrt{17}}}\cdot 5$$
$$\therefore \mathrm{BD}=\frac{15}{8}\sqrt{2}$$

と求まる。

2

〔解答〕

(1)	11	12	13	14				
	2	3	5	9				
(2)	15	16	17	18				
	1	3	1	3				
(3)	19	20	21	22	23	24	25	26
	1	2	1	6	1	3	1	2

〔解説〕

(1)

$n=1$ のとき，点Pの座標が偶数となるのは，

・出た目が2の場合

・出た目が4, 5, 6の場合

のどちらか一方の事象が起こったときであるから，求める確率は，

$$p_1=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

である。また，$n=2$ のとき，点Pの座標が偶数となるのは，

・1回目終了時点で偶数であり，2回目で出た目が2, 4, 5, 6の場合

・1回目終了時点で奇数であり，2回目で出た目が1, 3の場合

のどちらか一方の事象が起こったときであるから，求める確率は，

$$p_2=p_1\cdot\frac{4}{6}+(1-p_1)\cdot\frac{2}{6}=\frac{5}{9}$$

である。

(2)

(1)における $n=2$ のときと同様に考えると，$n+1$ 回目終了時点で点Pの座標が偶数となるのは，

・n 回目終了時点で偶数であり，$n+1$ 回目で出た目が2, 4, 5, 6の場合

・n 回目終了時点で奇数であり，$n+1$ 回目で出た目が1, 3の場合

のどちらか一方の事象が起こったときであるから，求める確率は，

$$p_{n+1}=p_n\cdot\frac{4}{6}+(1-p_n)\cdot\frac{2}{6}$$

$$\therefore p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3} \quad \cdots ①$$

である。

(3)

①式を変形すると，

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow p_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$$

となるから，数列 $\left\{p_n-\frac{1}{2}\right\}$ は初項 $p_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列である。したがって，数列 $\{p_n\}$ の一般項は，

$$p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow p_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

と表せる。よって，$\left|\frac{1}{3}\right|<1$ より，

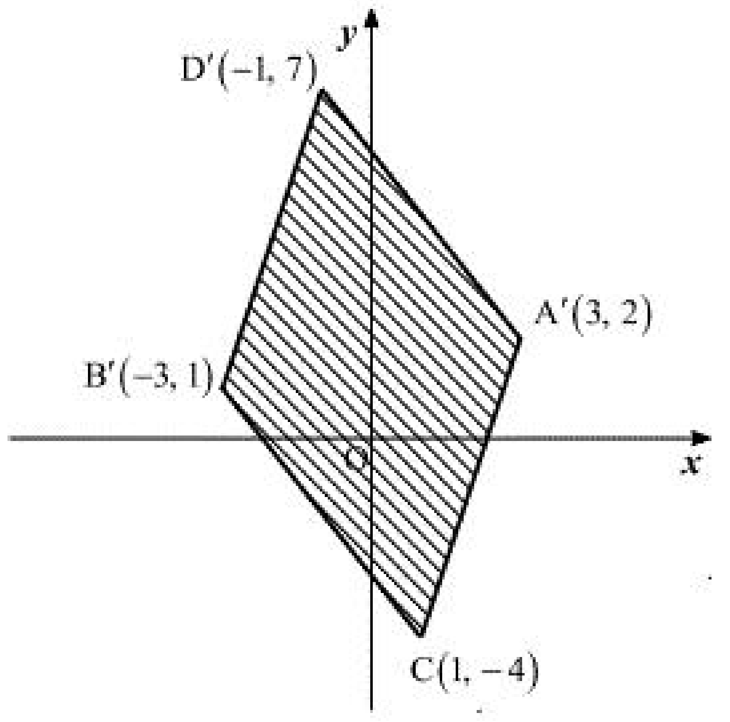
$$\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=\frac{1}{2}$$

である。

$\boxed{3}$

(1)

まず，$\vec{w}=s\vec{a}+t\vec{b}$ ($0 \leqq s \leqq 1$，$0 \leqq t \leqq 1$) で表される点$\mathrm{Q}\left(\vec{w}\right)$の存在範囲について考える。点$\mathrm{Q}\left(\vec{w}\right)$は$\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}=(-2, 11)$で表される点$\mathrm{D}\left(\vec{d}\right)$と原点，および点$\mathrm{A}(2, 6)$, $\mathrm{B}(-4, 5)$からなる平行四辺形の外周上または内部に存在する。ここで，点$\mathrm{P}\left(\vec{v}\right)$は点$\mathrm{Q}\left(\vec{w}\right)$をベクトル$\vec{c}$の分だけ平行移動させたものだから，$\mathrm{P}\left(\vec{v}\right)$は4点$\mathrm{C}(1, -4)$, $\mathrm{A}'(3, 2)$, $\mathrm{B}'(-3, 1)$, $\mathrm{D}'(-1, 7)$を頂点とする平行四辺形の外周上または内部に存在する。以下に斜線部で存在範囲を示す。ただし外周をすべて含む。



(答) 前図

(2)

$\vec{v}$を成分表示すると，

$$\vec{v}=s\vec{a}+t\vec{b}+\vec{c}=(2s-4t+1, 6s+5t-4) \quad \cdots ①$$

となる。(1)の図より，$\left|\vec{v}\right|$の値が最小値となるのは点$\mathrm{P}\left(\vec{v}\right)$が原点に一致する場合，すなわち$\left|\vec{v}\right|=0$となるときである。このとき，$\vec{v}=(0, 0)$であるから，①より

$$\begin{cases} 2s-4t+1=0 \\ 6s+5t-4=0 \end{cases}$$

$$\therefore s=\frac{11}{34}, t=\frac{7}{17}$$

となる。これは$0 \leqq s \leqq 1$，$0 \leqq t \leqq 1$を満たす。

(答) $s=\frac{11}{34}, t=\frac{7}{17}$

(3)

①に$s=1, t=1$を代入すると，

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(-1, 7)$$

と表せる。

(答) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(-1, 7)$

(4)

(1)の図において，ベクトル$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$の表す点は点D′であり，ベクトル$\vec{c}$の表す点は点Cである。したがって，$\left|\vec{v}-\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\right|+\left|\vec{c}-\vec{v}\right|$の値は線分PD′と線分PCの和に等しい。いま，図より

$$\mathrm{CD}' \leqq \mathrm{PD}'+\mathrm{PC} \leqq \mathrm{D'A'}+\mathrm{A'C}$$

であるから，最小値は，

$$\mathrm{CD}'=\sqrt{(-1-1)^2+\{7-(-4)\}^2}=5\sqrt{5}$$

であり，最大値は，

$$\mathrm{D'A'}+\mathrm{A'C}=\sqrt{(-1-3)^2+(7-2)^2}+\sqrt{(1-3)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{41}+\sqrt{40}=\sqrt{41}+2\sqrt{10}$$

である。

(答) 最小値：$5\sqrt{5}$，最大値：$\sqrt{41}+2\sqrt{10}$

$\boxed{4}$

(1)

時刻 t における点 P_1, P_2, P_3 の回転角は，それぞれ，

$$\frac{6t}{2\cdot 2\pi}\cdot 2\pi = 3t,\ \frac{6t}{3\cdot 2\pi}\cdot 2\pi = 2t,\ \frac{6t}{6\cdot 2\pi}\cdot 2\pi = t$$

と表せるから，各座標は，

$$P_1\left(2\cos 3t,\ 2\sin 3t\right),\ P_2\left(3\cos 2t,\ 3\sin 2t\right),\ P_3\left(6\cos t,\ 6\sin t\right)$$

となる。

(答) $P_1\left(2\cos 3t,\ 2\sin 3t\right),\ P_2\left(3\cos 2t,\ 3\sin 2t\right),\ P_3\left(6\cos t,\ 6\sin t\right)$

(2)

$\triangle P_1P_2P_3$ の重心 G の y 座標を Y とおいて，(1)の結果を利用すると，

$$Y=\frac{1}{3}(2\sin 3t+3\sin 2t+6\sin t)$$

となる。

(答) $\frac{1}{3}(2\sin 3t+3\sin 2t+6\sin t)$

(3)

(2)より，$f(t)=2\sin 3t+3\sin 2t+6\sin t$ とおいて，$Y=\frac{1}{3}f(t)$ の $0<t<\pi$ における最大値を求めればよい。$f(t)$ の導関数 $f'(t)$ は，

$$\begin{aligned}
f'(t)&=6\cos 3t+6\cos 2t+6\cos t\\
&=6\left(4\cos^3 t-3\cos t\right)+6\left(2\cos^2 t-1\right)+6\cos t\\
&=6\left(4\cos^3 t+2\cos^2 t-2\cos t-1\right)\\
&=6\left(\cos t+\frac{1}{2}\right)\left(4\cos^2 t-2\right)\\
&=24\left(\cos t+\frac{1}{2}\right)\left(\cos t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

であるから，$0<t<\pi$ より，$f(t)=0$ となる t は $t=\frac{\pi}{4},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{3}{4}\pi$ である。以下に $f(t)$ の増減表を示す。

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	↗	$3+4\sqrt{2}$	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	$-3+4\sqrt{2}$	↘	0

増減表より，$f(t)$ は $t=\frac{\pi}{4}$ で最大値 $3+4\sqrt{2}$ をとる。したがって，$\triangle P_1P_2P_3$ の重心 G の y 座標の最大値は，

$$\frac{1}{3}\left(3+4\sqrt{2}\right)=1+\frac{4}{3}\sqrt{2}$$

となる。

(答) $1+\frac{4}{3}\sqrt{2}$

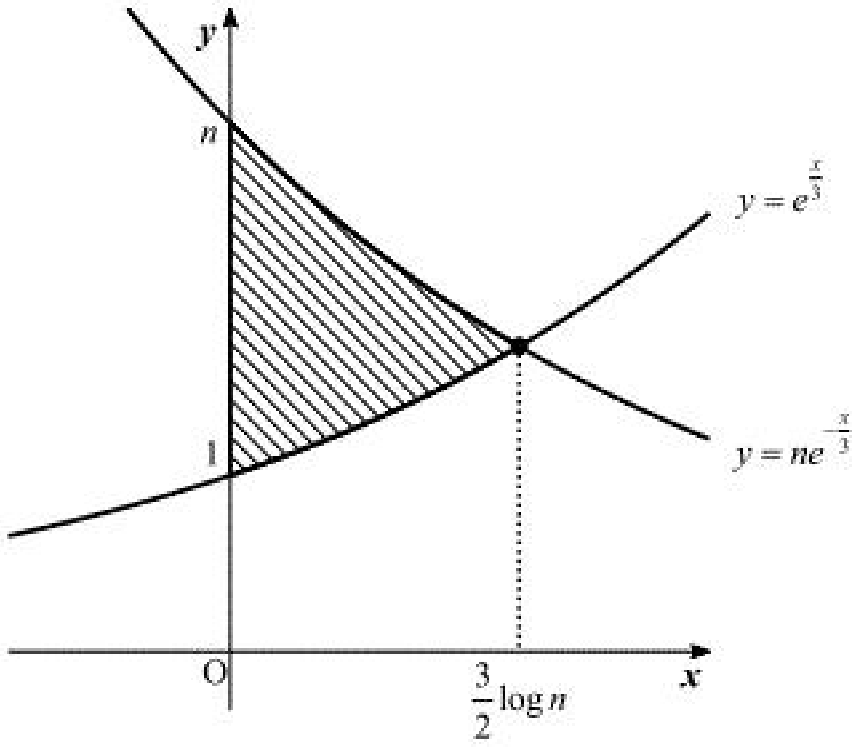
$\boxed{5}$

(1)

2 曲線の共有点の x 座標は,

$$e^{\frac{x}{3}}=ne^{-\frac{x}{3}}$$
$$\Leftrightarrow e^{\frac{2}{3}x}=n$$
$$\therefore x=\frac{3}{2}\log n(>0)\ (\because n=2,3,4,\ldots)$$

である。$n=2,3,4,\ldots$ より，$y=e^{\frac{x}{3}}$ は増加関数，$y=ne^{-\frac{x}{3}}$ は減少関数であるから, 2 曲線を図示すると以下のようになる。



図より，求める面積は,

$$\begin{aligned}S_n&=\int_0^{\frac{3}{2}\log n}\left(ne^{-\frac{x}{3}}-e^{\frac{x}{3}}\right)dx\\&=\left[-3ne^{-\frac{x}{3}}-3e^{\frac{x}{3}}\right]_0^{\frac{3}{2}\log n}\\&=\left(-3n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}-3\sqrt{n}\right)-(-3n-3)\\&=3n-6\sqrt{n}+3\\&=3\left(\sqrt{n}-1\right)^2\end{aligned}$$

となる。

(答) $S_n=3\left(\sqrt{n}-1\right)^2$

(2)

(1)の結果を用いると，$n\geqq 3$ のとき,

$$\begin{aligned}S_n-S_{n-1}&=\left(3n-6\sqrt{n}+3\right)-\left\{3(n-1)-6\sqrt{n-1}+3\right\}\\&=3-6\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)\\&=3-6\cdot\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\end{aligned}$$

が得られるから,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(S_n-S_{n-1}\right)&=\lim_{n\to\infty}\left(3-6\cdot\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\right)\\&=3+6\cdot 0\\&=3\end{aligned}$$

となる。

(答) $\lim_{n\to\infty}\left(S_n-S_{n-1}\right)=3$