$\boxed{1}$

〔解答〕

(1)	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$
	7	5
(2)	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$
	3	8
(3)	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$
	8	1

〔解説〕

(1)

先手プレイヤーが勝つのはゲーム終了時に先手プレイヤーが石を2個持っている場合である。以後，先手プレイヤーのコインの出方を表，裏，後手プレイヤーのコインの出方をオ，ウで表すこととする。先手プレイヤーが石を2個持つ場合は，

表

裏→ウ

の2通りであり，確率はそれぞれ$\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2$であるから，求める確率は，

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}=75\%$$

となる。

(2)

先手プレイヤーが勝つのはゲーム終了時に先手プレイヤーが石を3個持っている場合である。先手プレイヤーが石を3個持つ場合は，

表→ウ

裏→ウ→表

の2通りであり，確率はそれぞれ

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

であるから，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}=37.5\% \approx 38\%$$

となる。

(3)

先手プレイヤーが勝つのはゲーム終了時に先手プレイヤーが石を3個持っている場合，または4個持っている場合である。

[1] 先手プレイヤーが石を4個持つ場合は，

表→ウ→表

の1通りあり，その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

である。

[2] 先手プレイヤーが石を3個持つ場合は，

表→オ

表→ウ→裏

裏→オ→表

裏→ウ→表

裏→ウ→裏→ウ

の5通りあり，その確率はそれぞれ

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

である。

以上[1], [2]より，求める確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{13}{16}=81.25\% \approx 81\%$$

となる。

2

〔解答〕

$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	$\boxed{1\ 0}$	$\boxed{1\ 1}$	$\boxed{1\ 2}$
−	3	8	5	9	6

〔解説〕

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \int_0^1 (x-t-1)(x-2t-1)\,dx \\
&= \int_0^1 \left\{x^2-(3t+2)x+2t^2+3t+1\right\}dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(3t+2)x^2+\left(2t^2+3t+1\right)x\right]_0^1 \\
&= 2t^2+\frac{3}{2}t+\frac{1}{3} \\
&= 2\left(t+\frac{3}{8}\right)^2+\frac{5}{96}
\end{aligned}
$$

となるので，$f(t)$ は $t=\dfrac{-3}{8}$ で最小値 $\dfrac{5}{96}$ をとる。

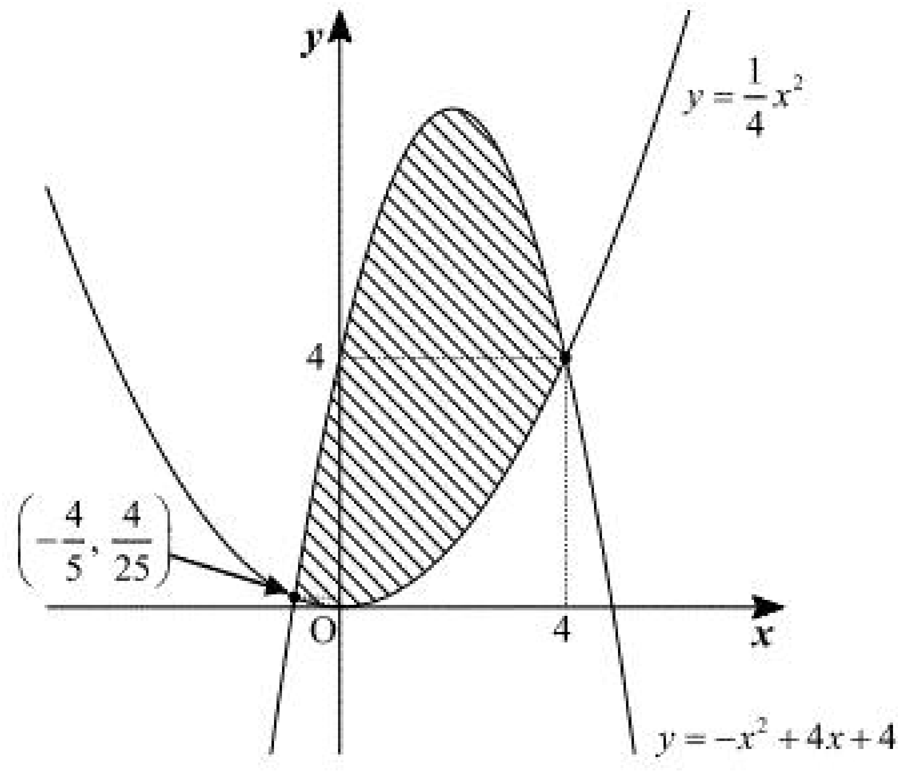
3

(1)

$y=-x^2+4x+4$ と $y=\frac{1}{4}x^2$ から y を消去し，交点の x 座標を求めると，

$$-x^2+4x+4=\frac{1}{4}x^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(x-4)(5x+4)=0$$
$$\therefore x=4,\ -\frac{4}{5}$$

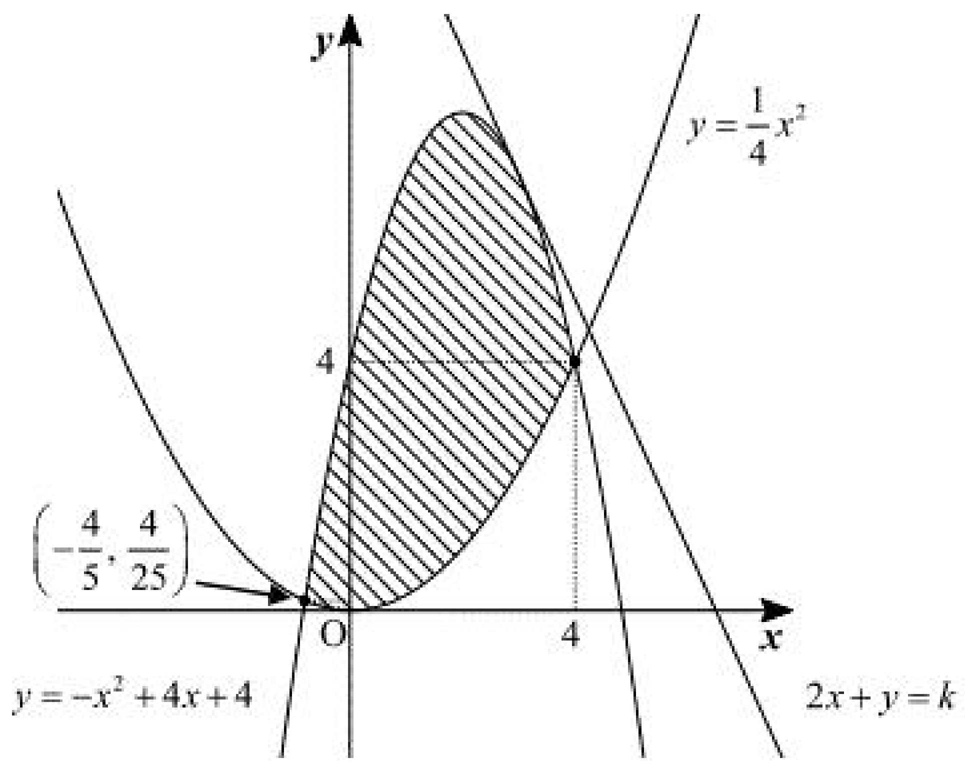
となり，y 座標はそれぞれ $y=4,\ \frac{4}{25}$ となる。



D は図の斜線部，ただし境界線を含む。

(答) 前図

(2)



$2x+y=k$ とおく。k は関数 $y=-2x+k$ の切片となる。

[1] 最大値

最大値をとる点の候補は，$y=-x^2+4x+4$ における傾きが -2 となる接線の接点または2曲線の交点 $(4,4)$ である。ここで，接点を $(p,\ -p^2+4p+4)$ とおくと，接線の方程式は

$$y=(-2p+4)(x-p)-p^2+4p+4$$

となり，傾きが -2 であることより，

$$-2p+4=-2 \Leftrightarrow p=3$$

となる。従って，接点の座標は，$(3,7)$ とわかる。これは領域 D の中に含まれ，このとき k の値は

$$k=2\cdot3+7=13$$

となる。また，直線 $2x+y=k$ が2曲線の交点 $(4,4)$ を通るとき，k の値は

$$k=2\cdot4+4=12$$

となる。したがって，最大値をとる点は $(3,7)$ となり，最大値は $k=13$ となる。

[2] 最小値

最小値をとる点の候補は，$y=\frac{1}{4}x^2$ における傾きが -2 となる接線の接点または2曲線の交点 $\left(-\frac{4}{5},\ \frac{4}{25}\right)$ である。$2x+y=k$ と $y=\frac{1}{4}x^2$ との接点を $\left(q,\ \frac{1}{4}q^2\right)$ とおくと，この点における接線の方程式は

$$y=\frac{q}{2}(x-q)+\frac{1}{4}q^2$$

となる。この直線の傾きが -2 であることから

$$\frac{q}{2}=-2 \Leftrightarrow q=-4$$

より接点は $(-4,4)$ となるが，この点は領域 D には含まれない。よって，最小値をとる点は2曲線の交点 $\left(-\frac{4}{5},\ \frac{4}{25}\right)$ であり，最小値は $2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{4}{25}=-\frac{36}{25}$ となる。

(答) 最大値:13 $\{(x,\ y)=(3,\ 7)\}$

最小値:$-\frac{36}{25}$ $\left\{(x,\ y)=\left(-\frac{4}{5},\ \frac{4}{25}\right)\right\}$

$\boxed{4}$

(1)

$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= (\cos\theta-\cos2\theta)^2+(2\sin\theta-\sin2\theta)^2 \\
&= \cos^2\theta-2\cos\theta\cos2\theta+1+4\sin^2\theta-4\sin\theta\sin2\theta \\
&= \cos^2\theta-2\cos\theta(2\cos^2\theta-1)+(2\cos^2\theta-1)^2 \\
&\quad +4(1-\cos^2\theta)-8\cos\theta(1-\cos^2\theta)+4\cos^2\theta(1-\cos^2\theta) \\
&= \cos^2\theta-4\cos^3\theta+2\cos\theta+4\cos^4\theta-4\cos^2\theta+1 \\
&\quad +4-4\cos^2\theta-8\cos\theta+8\cos^3\theta+4\cos^2\theta-4\cos^4\theta \\
&= 4\cos^3\theta-3\cos^2\theta-6\cos\theta+5 \\
&= 4x^3-3x^2-6x+5
\end{aligned}
$$

となる。

(答) $f(\theta)=4x^3-3x^2-6x+5$

(2)

$$g(x)=4x^3-3x^2-6x+5$$

とおく。このとき，

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= 12x^2-6x-6 \\
&= 6(2x+1)(x-1)
\end{aligned}
$$

となるので，$-1\leqq\cos\theta\leqq1 \Leftrightarrow -1\leqq x\leqq1$ の範囲における増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	4	$\nearrow$	$\frac{27}{4}$	$\searrow$	0

したがって，$g(x)$ は $x=-\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{27}{4}$ をとるから，$\cos\theta=-\frac{1}{2}\ (0\leqq\theta\leqq2\pi)$ の解は

$\theta=\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ であることより，$f(\theta)$ は $\theta=\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ で最大値 $\frac{27}{4}$ をとる。

(答) 最大値: $\frac{27}{4}\left(\theta=\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right)$