$\boxed{1}$

〔解答〕

(1)	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$
	4	0
(2)	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$
	7	0
(3)	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$
	5	7

〔解説〕

(1)

青さんが白玉，黒玉を引くことをそれぞれ白，黒とし，学さんが白玉，黒玉を引くことをそれぞれシ，クとする。最初に青さんが白玉を取り出したとき，青さんが勝つような2回目以降の取り出し方は，

シ

ク→白→シ

の2通りある。したがって，求める確率は，

$$\frac{2}{6}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{5}$$

であるから，$100\times\frac{2}{5}=40(\%)$ となる。

(2)

最初に青さんが黒玉を取り出したとき，青さんが勝つような2回目以降の取り出し方は，

ク

シ→黒→ク

シ→黒→シ→黒→ク

の3通りある。したがって，求める確率は，

$$\frac{3}{6}+\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}+\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{10}$$

であるから，$100\times\frac{7}{10}=70(\%)$ となる。

(3)

最初に青さんが白玉を取り出し，かつゲームに勝つ確率は，(1)より，

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{35}$$

である。また，最初に青さんが黒玉を取り出し，かつゲームに勝つ確率は，(2)より，

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{7}{10}=\frac{2}{5}$$

である。したがって，求める確率は，

$$\frac{6}{35}+\frac{2}{5}=\frac{4}{7}$$

であるから，$100\times\frac{4}{7}=57.1\ldots(\%)$ を四捨五入して57%となる。

$\boxed{2}$

〔解答〕

(1)	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$	$\boxed{12}$	$\boxed{13}$
	2	1	0	0	9	3	2
(2)	$\boxed{14}$	$\boxed{15}$	$\boxed{16}$	$\boxed{17}$	$\boxed{18}$	$\boxed{19}$	$\boxed{20}$
	−	9	6	−	1	9	6

〔解説〕

(1)

ド・モアブルの定理より,

$$
\begin{aligned}
(1-i)^{2018} &= \left\{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right\}^{2018} \\
&= 2^{1009}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\pi\right)\right\}^{2018} \\
&= 2^{1009}\left\{\cos\left(-\frac{2018}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2018}{4}\pi\right)\right\} \\
&= 2^{1009}\left\{\cos\left(-506+\frac{3}{2}\right)\pi+i\sin\left(-506+\frac{3}{2}\right)\pi\right\} \\
&= 2^{1009}\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)
\end{aligned}
$$

となる。よって $r=2^{1009}$, $\theta=\frac{3}{2}\pi$ である。

(2)

$p(x)$, $p(x+100)$ が $x+2$ で割り切れるので, 因数定理より

$$p(-2)=0,\ p(-2+100)=0 \Leftrightarrow p(-2)=0,\ p(98)=0$$

が成り立つ。したがって $x^2+ax+b=0$ は $x=-2, 98$ を解にもつから, 解と係数の関係より

$$-a=-2+98$$
$$\therefore a=-96$$
$$b=(-2)\cdot 98=-196$$

となる。

3

(1)

$$\left|\overrightarrow{OA}\right|=1,\ \left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{5},\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1$$

より，

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

となる。

(答) $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

(2)

$\overrightarrow{BP}=(x,\ y-1,\ -2)$ であるから，

$$\left|\overrightarrow{BP}\right|=\sqrt{x^2+(y-1)^2+4},\ \overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BO}=-y+5$$

が得られ，これより，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BO}}{\left|\overrightarrow{BO}\right|\left|\overrightarrow{BP}\right|}=\frac{-y+5}{\sqrt{5}\sqrt{x^2+(y-1)^2+4}}$$

となる。

(答) $\cos\theta=\dfrac{-y+5}{\sqrt{5}\sqrt{x^2+(y-1)^2+4}}$

(3)

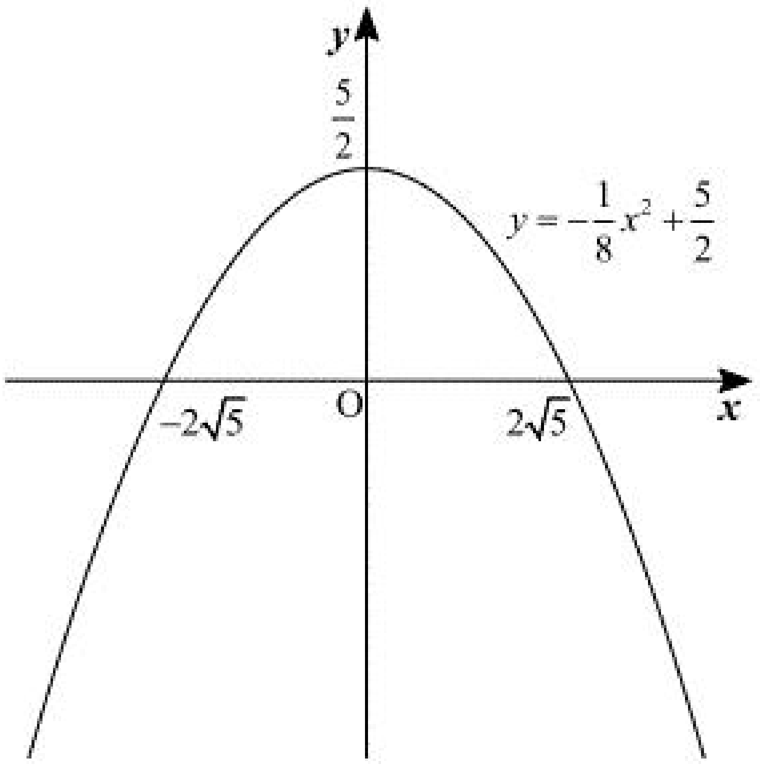
(1), (2)より，

$$\cos\theta=\cos\alpha$$
$$\Leftrightarrow\frac{-y+5}{\sqrt{5}\sqrt{x^2+(y-1)^2+4}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$\Leftrightarrow -y+5=\sqrt{x^2+(y-1)^2+4}$$

となる。右辺は正だから，$-y+5>0\Leftrightarrow y<5$ である。この下で両辺を2乗して，

$$(-y+5)^2=x^2+(y-1)^2+4$$
$$\Leftrightarrow x^2+8y=20$$
$$\Leftrightarrow y=-\frac{1}{8}x^2+\frac{5}{2}$$

が得られる。$y<5$ と合わせ，これを xy 平面上に図示すると以下のようになる。



(答) 前図

$\boxed{4}$

(1)

$$y' = (1-x)e^{-x}$$

であるから，$\mathrm{P}(t,\ te^{-t})$ における接線の方程式は，

$$y = (1-t)e^{-t}(x-t) + te^{-t}$$
$$\Leftrightarrow y = (1-t)e^{-t}x + t^2e^{-t}$$

となる。

(答)　$y = (1-t)e^{-t}x + t^2e^{-t}$

(2)

点Qを通る接線の本数は，$(x,\ y) = (0,\ k)$ を(1)の接線の方程式に代入して得られる

$$k = t^2e^{-t}$$

を満たす t の個数に他ならない。ここで，$f(t) = t^2e^{-t}$ とすると，

$$f'(t) = 2te^{-t} - t^2e^{-t} = t(2-t)e^{-t}$$

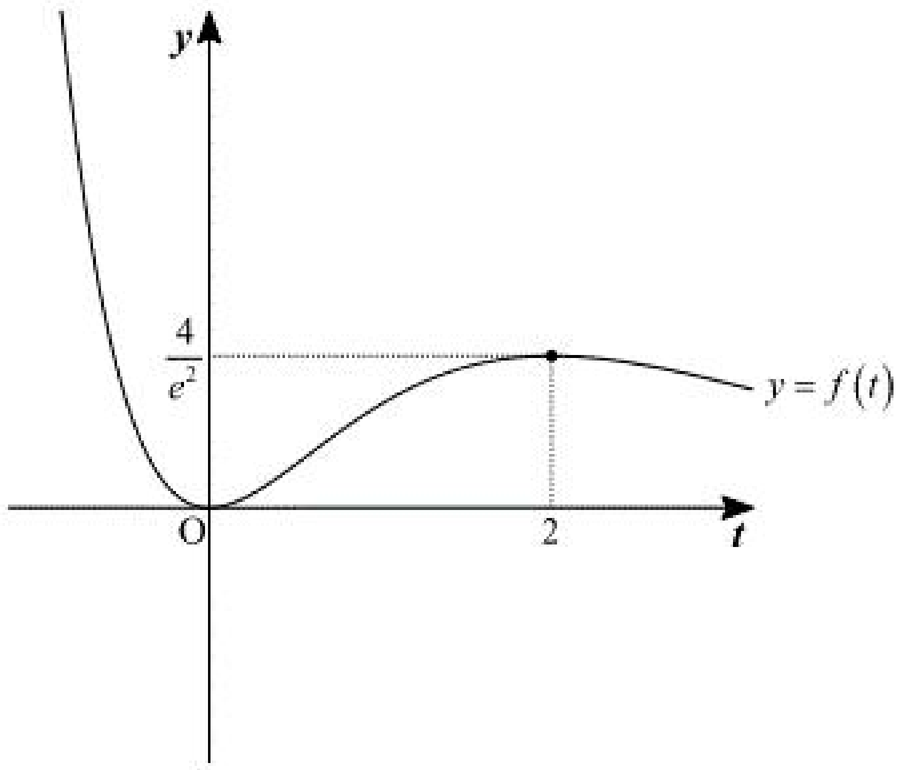
であり，

$$\lim_{x\to-\infty} f(t) = \infty,\ \lim_{x\to\infty} f(t) = 0$$

であるから，増減表は次のようになる。

t	$(-\infty)$	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	(∞)
$f'(t)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(t)$	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

したがって，$y = f(t)$ のグラフは以下のようになる。



このグラフと $y = k$ の交点の個数が $k = t^2e^{-t}$ を満たす t の個数であり，すなわち点Qを通る接線の本数である。したがって，求める接線の本数は，

(i)　$k < 0$ のとき，0本

(ii)　$k = 0,\ k > \frac{4}{e^2}$ のとき，1本

(iii)　$k = \frac{4}{e^2}$ のとき，2本

(iv)　$0 < k < \frac{4}{e^2}$ のとき，3本

となる。

(答)　前述

$\boxed{5}$

(1)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(8x+3)(x+1)-(4x^2+3x)}{(x+1)^2} \\
&= \frac{(2x+1)(2x+3)}{(x+1)^2}
\end{aligned}
$$

となるので，増減表は次のようになる。

x	(-1)	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

したがって，$f(x)$ は $x=-\frac{1}{2}$ で最小値 -1 をとる。最大値は存在しない。

(答) 最大値:なし，最小値: -1

(2)

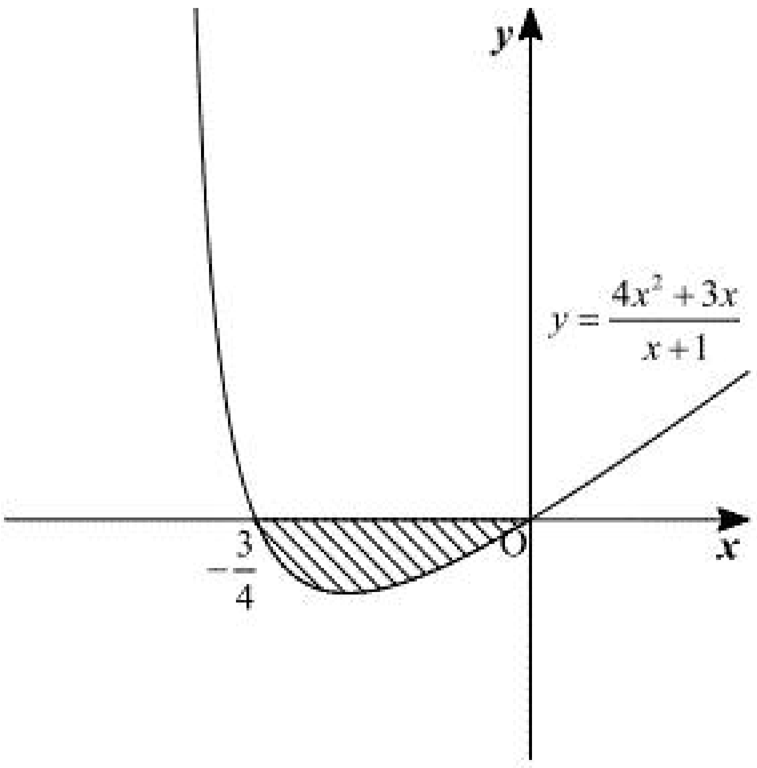
$f(x)=\frac{4x^2+3x}{x+1}=4x-1+\frac{1}{x+1}$ であるので，

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to -1+0} f(x)=\infty$$

となる。また，$y=f(x)$ の x 軸との交点を求めると，

$$
\begin{aligned}
& f(x)=0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{4x^2+3x}{x+1}=0 \\
\Leftrightarrow\ & 4x^2+3x=0\ (\because x>-1 \Leftrightarrow x+1>0) \\
\Leftrightarrow\ & x(4x+3)=0 \\
& \therefore x=0,\ -\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

より，$(0,\ 0),\left(-\frac{3}{4},\ 0\right)$ とわかる。よって(1)の増減表と合わせて，グラフの概形は以下のようになる。



求める面積は図の斜線部であるから，これを S として，

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-\frac{3}{4}}^{0}\left(-\frac{4x^2+3x}{x+1}\right)dx \\
&= \int_{-\frac{3}{4}}^{0}\left\{-\left(4x-1+\frac{1}{x+1}\right)\right\}dx \\
&= -\left[2x^2-x+\log(x+1)\right]_{-\frac{3}{4}}^{0} \\
&= \frac{15}{8}-2\log 2
\end{aligned}
$$

が得られる。

(答) $\frac{15}{8}-2\log 2$