1

〔解答〕

(1)	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$		
	1	8	2	5	6		
(2)	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$	$\boxed{12}$
	1	9	2	1	6	3	8
(3)	$\boxed{13}$	$\boxed{14}$					
	6	2					

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}
&(\log_{16} x)(\log_2 x - 5) = \log_2 64\\
&\Leftrightarrow \frac{\log_2 x}{\log_2 16}\cdot(\log_2 x - 5) = \log_2 2^6\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{4}(\log_2 x)^2 - \frac{5}{4}\log_2 x = 6\\
&\Leftrightarrow (\log_2 x)^2 - 5\log_2 x - 24 = 0\\
&\Leftrightarrow (\log_2 x + 3)(\log_2 x - 8) = 0\\
&\Leftrightarrow \log_2 x = -3,\ 8
\end{aligned}$$

と導ける。よって，

$$x = 2^{-3},\ 2^5$$

$$\therefore x = \frac{1}{8},\ 256$$

である。

(2)

3 個のさいころの出る目の最大値が 3 となる確率は，出る目がすべて 3 以下となる確率から出る目がすべて 2 以下となる確率を引いたものである。したがって，

$$\left(\frac{3}{6}\right)^3 - \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{27-8}{216} = \frac{19}{216}$$

である。また，出る目の最大値が 5 となる確率は，出る目がすべて 5 以下となる確率から出る目がすべて 4 以下となる確率を引いたものであり，

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3 - \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{125-64}{216} = \frac{61}{216}$$

である。さらに，出る目の最大値が 1 となる確率は，出る目がすべて 1 である確率であるので，

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$$

である。よって，出る目の最大値が奇数となる確率は，これらを足し合わせたもので，

$$\frac{19}{216} + \frac{61}{216} + \frac{1}{216} = \frac{81}{216} = \frac{3}{8}$$

である。

(3)

三角関数の加法定理を適用して，

$$\begin{aligned}
\sin 105^\circ + \cos 75^\circ &= \sin(45^\circ + 60^\circ) + \cos(45^\circ + 30^\circ)\\
&= (\sin 45^\circ \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \sin 60^\circ) + (\cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\\
&= \frac{\sqrt{6}}{2}
\end{aligned}$$

と導ける。よって，$\sin 105^\circ + \cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ である。

$\boxed{2}$

(1)

$\triangle$ ADE, $\triangle$ EFG, $\triangle$ DGH において，三平方の定理より，

$$\mathrm{DE}=\sqrt{\mathrm{AD}^2+\mathrm{AE}^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$$
$$\mathrm{EG}=\sqrt{\mathrm{EF}^2+\mathrm{FG}^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$
$$\mathrm{DG}=\sqrt{\mathrm{DH}^2+\mathrm{HG}^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$

となる。よって，$\angle\mathrm{DEG}=\alpha$ とおくと，$\triangle$ DEG に余弦定理を適用して，

$$\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{\mathrm{DE}^2+\mathrm{EG}^2-\mathrm{DG}^2}{2\cdot\mathrm{DE}\cdot\mathrm{EG}}\\&=\frac{\left(\sqrt{13}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{10}\right)^2}{2\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}}\\&=\frac{4}{\sqrt{65}}\\&=\frac{4\sqrt{65}}{65}\end{aligned}$$

と導くことができる。

(答) $\dfrac{4\sqrt{65}}{65}$

(2)

$0^\circ<\alpha<180^\circ$ より，$0<\sin\alpha\leqq 1$ であるから，

$$\begin{aligned}\sin\alpha&=\sqrt{1-\cos^2\alpha}\\&=\sqrt{1-\left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right)^2}\\&=\sqrt{\frac{49}{65}}\\&=\frac{7\sqrt{65}}{65}\end{aligned}$$

となる。よって，$\triangle$ DEG の面積 S は，

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{DE}\cdot\mathrm{EG}\cdot\sin\alpha\\&=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{7\sqrt{65}}{65}\\&=\frac{7}{2}\end{aligned}$$

である。

(答) $\dfrac{7}{2}$

(3)

三角錐 DEGH の体積 V について考える。辺 DH は$\triangle$ EHG を含む平面に垂直であるから，三角錐 DEGH の底面を$\triangle$ EHG とみると，高さは DH であるので，V は

$$V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot2\cdot1\right)\cdot3=1$$

となる。また，HM の長さを h とする。三角錐 DEGH の底面を$\triangle$ DEG とみると，高さは HM となる。ゆえに，$\triangle$ DEG の面積 S は(2)より $S=\dfrac{7}{2}$ であるから，V は

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\cdot S\cdot h\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{2}\cdot h\\&=\frac{7}{6}h\end{aligned}$$

である。したがって，

$$1=\frac{7}{6}h$$
$$\Leftrightarrow h=\frac{6}{7}$$

より，HM の長さは $\dfrac{6}{7}$ である。

(答) $\dfrac{6}{7}$

3

(1)

$$|5x+5|=\begin{cases}5x+5 & (x\geqq -1)\\ -5x-5 & (x<-1)\end{cases}$$

であるので，曲線 $C: y=x^2+3x-|5x+5|$ は，

$$x^2+3x-|5x+5|=\begin{cases}x^2-2x-5 & (x\geqq -1)\\ x^2+8x+5 & (x<-1)\end{cases}$$

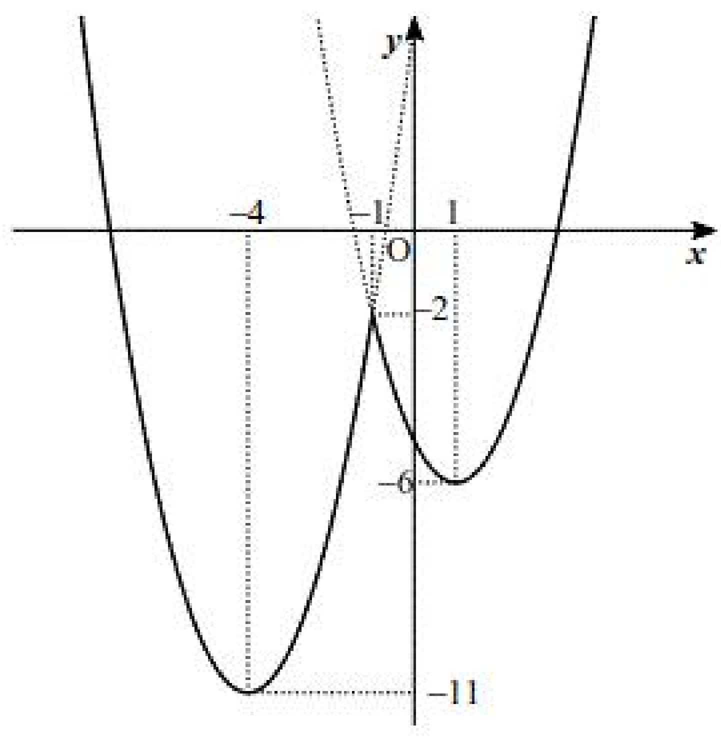
となる。$x\geqq -1$ において，

$$y=x^2-2x-5$$
$$=(x-1)^2-6$$

よりグラフの頂点は $(1,-6)$，$x<-1$ において，

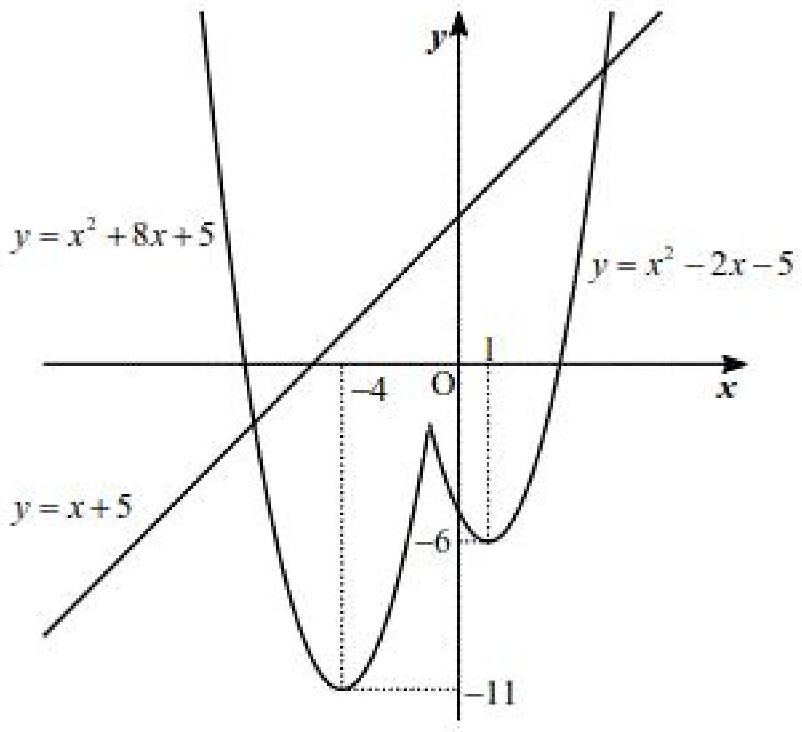
$$y=x^2+8x+5$$
$$=(x+4)^2-11$$

より頂点は $(-4,-11)$ である。これより，C の概形は下の図の実線部分のようになる。



(答) 上図の実線部分

(2)



グラフより，$y=x^2+3x-|5x+5|$ と $y=x+5$ の交点は，$y=x^2+8x+5$ と $y=x+5$ の $x<-1$ における交点と，$y=x^2-2x-5$ と $y=x+5$ の $x\geqq -1$ における交点の 2 つである。それぞれを求める。まず，$y=x^2+8x+5$ と $y=x+5$ から y を消去すると，

$$x^2+8x+5=x+5$$
$$\Leftrightarrow x^2+7x=0$$
$$\Leftrightarrow x(x+7)=0$$
$$\Leftrightarrow x=0,\ -7$$

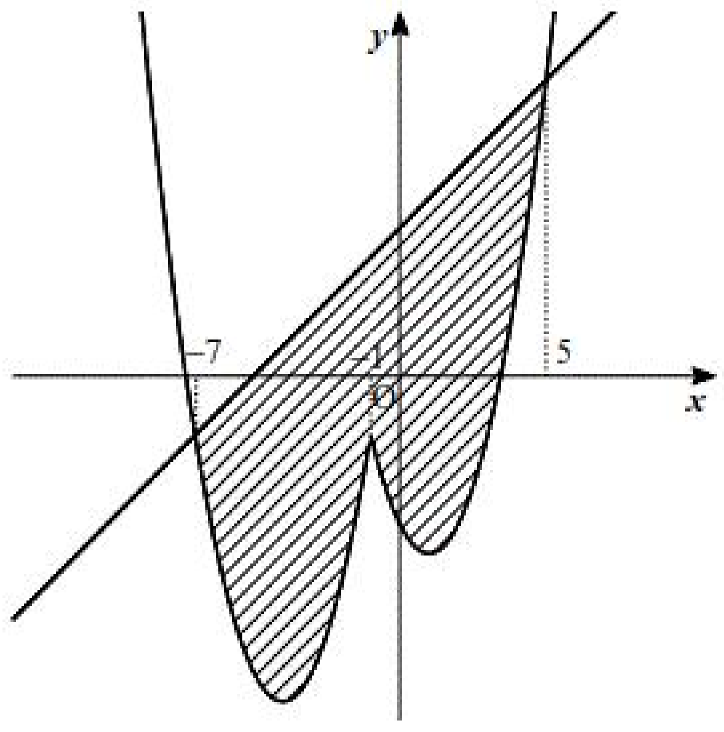
である。このうち，$x<-1$ を満たすものは，$x=-7$ であるので，交点は $(-7,-2)$ である。次に，$y=x^2-2x-5$ と $y=x+5$ から y を消去すると，

$$x^2-2x-5=x+5$$
$$\Leftrightarrow x^2-3x-10=0$$
$$\Leftrightarrow (x-5)(x+2)=0$$
$$\Leftrightarrow x=5,\ -2$$

である。このうち，$x\geqq -1$ を満たすものは，$x=5$ であるので，交点は $(5,10)$ である。よって，求める交点の座標は，$(-7,-2),\ (5,10)$ である。

(答) $(-7,-2),\ (5,10)$

(3)



曲線 C と直線 ℓ によって囲まれた部分の面積は，上のグラフにおける斜線部分の面積である。よって，求める面積は，

$$\int_{-7}^{-1}\left\{(x+5)-\left(x^2+8x+5\right)\right\}dx+\int_{-1}^{5}\left\{(x+5)-\left(x^2-2x-5\right)\right\}dx$$
$$=\int_{-7}^{-1}\left(-x^2-7x\right)dx+\int_{-1}^{5}\left(-x^2+3x+10\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2\right]_{-7}^{-1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+10x\right]_{-1}^{5}$$
$$=\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{7}{2}\right)-\left(\frac{343}{3}-\frac{343}{2}\right)\right\}+\left\{\left(-\frac{125}{3}+\frac{75}{2}+50\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-10\right)\right\}$$
$$=54+54$$
$$=108$$

である。

(答) 108