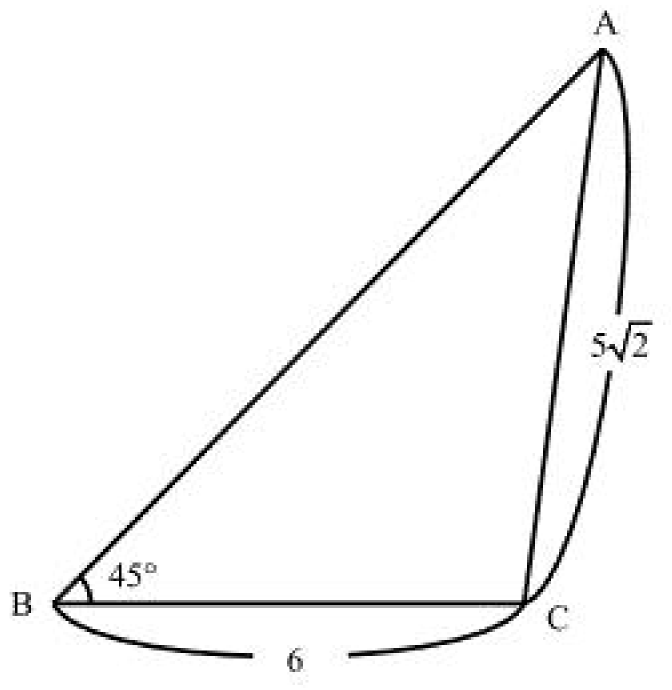
Ⅰ

〔解答〕

(1)	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$
	3	5	−	2	1	0	7	2
(2)	$\boxed{9}$	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$	$\boxed{12}$	$\boxed{13}$			
	1	8	1	0	8			

〔解説〕

(1)



△ABC において正弦定理より,

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin A}=\frac{\mathrm{AC}}{\sin B}$$
$$\Leftrightarrow \sin A=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}\cdot\sin B$$
$$\therefore \sin A=\frac{3}{5}$$

が得られる。また，余弦定理より,

$$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\cos 45^\circ$$
$$\Leftrightarrow \left(5\sqrt{2}\right)^2=\mathrm{AB}^2+6^2-2\cdot\mathrm{AB}\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{AB}^2-6\sqrt{2}\mathrm{AB}-14=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\mathrm{AB}-7\sqrt{2}\right)\left(\mathrm{AB}+\sqrt{2}\right)=0$$
$$\therefore \mathrm{AB}=7\sqrt{2}\ (\because \mathrm{AB}>0)$$

が成立する。もう一度余弦定理を用いて,

$$\cos C=\frac{\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2-\mathrm{AB}^2}{2\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}}$$
$$=\frac{6^2+\left(5\sqrt{2}\right)^2-\left(7\sqrt{2}\right)^2}{2\cdot 6\cdot 5\sqrt{2}}$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{10}$$

となる。

(2)

12mm の板の枚数を x 枚，14mm の板の枚数を y 枚とすると,

$$12x+14y=1500$$
$$\Leftrightarrow 6x+7y=750$$

が成り立つ。この方程式の整数解の1つに $(x,\ y)=(125,\ 0)$ があるため,

$$12\cdot 125+14\cdot 0=1500$$

が成り立つ。これら2式を辺々引いて,

$$6(x-125)+7y=0$$

となる。6, 7は互いに素であるため，$x,\ y$ は整数 k を用いて

$$x-125=-7k,\ y=6k$$
$$\Leftrightarrow x=-7k+125,\ y=6k$$

と表すことができる。条件より,

$$x\geqq 0,\ y\geqq 0$$

であるため,

$$-7k+125\geqq 0,\ 6k\geqq 0$$
$$\Leftrightarrow 0\leqq k\leqq\frac{125}{7}=17+\frac{6}{7}$$

が得られる。これを満たす整数 k の数は18個であるため，組み合わせは全部で18通りとなる。また，合計枚数が最も少ないとき，14mm の板の数が最も多いため，$k=17$ であり，このとき,

$$x+y=(-7k+125)+6k$$
$$=-k+125$$
$$=-17+125$$
$$=108$$

となり，板の最小枚数は108枚であると分かる。

2

(1)

$$
\begin{aligned}
a_3 &= 777_{(8)} \\
&= 7+7\cdot 8+7\cdot 8^2 \\
&= 511
\end{aligned}
$$

となる。

(答)　$a_3 = 511$

(2)

$$
\begin{aligned}
a_n &= 7+7\cdot 8+7\cdot 8^2+\cdots+7\cdot 8^{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} 7\cdot 8^k \\
&= 7\cdot\frac{8^n-1}{8-1} \\
&= 8^n-1
\end{aligned}
$$

となる。

(答)　$a_n = 8^n - 1$

(3)

$$a_n \geqq 10^{10}$$

を満たす最小の自然数nを求める。(2)より，$a_n = 8^n - 1$であるため，$8^n > 10^{10}$となる最小のnを求めれば良い。$8^n > 10^{10}$の両辺の常用対数をとると，

$$
\begin{aligned}
&\log_{10} 8^n > \log_{10} 10^{10} \\
\Leftrightarrow\ &\log_{10} 2^{3n} > 10 \\
\Leftrightarrow\ &3n\log_{10} 2 > 10 \\
\Leftrightarrow\ &n > \frac{10}{3\log_{10} 2} = 11.074\cdots
\end{aligned}
$$

であり，近似値$\log_{10} 2 = 0.3010$より，

$$
\begin{aligned}
\frac{10}{3\log_{10} 2} &= \frac{10}{3\cdot 0.3010} \\
&= 11+\frac{67}{903}
\end{aligned}
$$

となるため，$n \geqq 12$が得られる。よって，求める最小の自然数nは12となる。

(答)　$n = 12$

3

(1)

直線 $y=-4x+3$ と曲線 $y=f(x)$ との接点を $\left(a, \frac{1}{2}a^2+ap+q\right)$，$y=2x-15$ と曲線 $y=f(x)$ との接点を $\left(b, \frac{1}{2}b^2+bp+q\right)$ とおく。ここで，$f'(x)=x+p$ であるため，接線の方程式はそれぞれ，

$$y=(a+p)(x-a)+\frac{1}{2}a^2+ap+q$$
$$=(a+p)x-\frac{1}{2}a^2+q$$
$$y=(b+p)(x-b)+\frac{1}{2}b^2+bp+q$$
$$=(b+p)x-\frac{1}{2}b^2+q$$

となる。係数を比較することで，

$a+p=-4$ ・・・①

$b+p=2$ ・・・②

$-\frac{1}{2}a^2+q=3$ ・・・③

$-\frac{1}{2}b^2+q=-15$ ・・・④

が得られる。①，②を辺々引いて，

$a-b=-6$ ・・・⑤

となり，③，④を辺々引いて，

$$-\frac{1}{2}\left(a^2-b^2\right)=18$$

$\Leftrightarrow (a-b)(a+b)=-36$ ・・・⑥

となる。⑤，⑥より，

$a+b=6$ ・・・⑦

が得られるため，⑤，⑦より，

$$a=0, b=6$$

となる。これを①，③に代入して，

$$p=-4, q=3$$

が得られる。

(答) $p=-4, q=3$

(2)

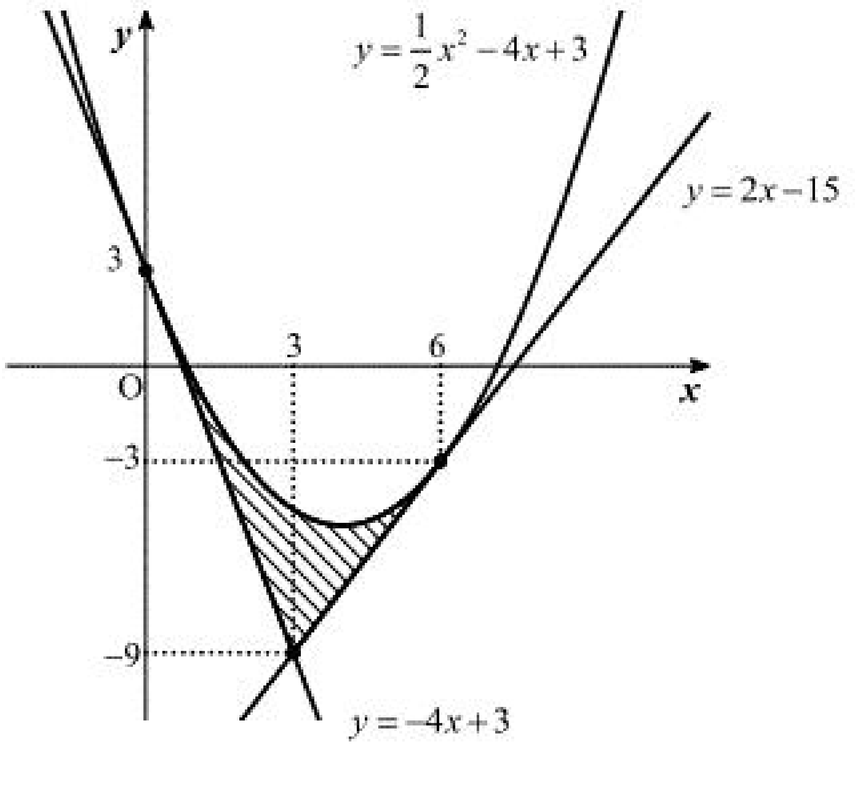
2 直線の交点を求める。2 つの直線の式 $y=-4x+3$ と $y=2x-15$ より y を消去して，

$$-4x+3=2x-15$$
$$\therefore x=3$$

となる。これを $y=-4x+3$ に代入すると，

$$y=-4\cdot 3+3$$
$$=-9$$

となるため，2 つの直線の交点は $(3,-9)$ となる。よって，2 直線 $y=2x-5$, $y=-4x+3$ と曲線 $y=f(x)$ の位置関係は以下の図の通りである。



以上より，求める図形の面積 S は

$$S=\int_0^3\left\{\left(\frac{1}{2}x^2-4x+3\right)-(-4x+3)\right\}dx+\int_3^6\left\{\left(\frac{1}{2}x^2-4x+3\right)-(2x-15)\right\}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^3 x^2dx+\frac{1}{2}\int_3^6(x-6)^2dx$$
$$=\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^3+\left[\frac{1}{6}(x-6)^3\right]_3^6$$
$$=9$$

となる。

(答) $S=9$