I

〔解答〕

(1)	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$					
	1	7	5	3	2					
(2)	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$						
	1	3	1	3						
(3)	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$	$\boxed{12}$	$\boxed{13}$	$\boxed{14}$	$\boxed{15}$	$\boxed{16}$	$\boxed{17}$	$\boxed{18}$	$\boxed{19}$
	1	−	2	1	−	2	−	5	−	8
(4)	$\boxed{20}$	$\boxed{21}$	$\boxed{22}$							
	7	1	2							

〔解説〕

(1)

$\sqrt{5}$ の小数部分を a とすると，$2<\sqrt{5}<3$ より，$a=\sqrt{5}-2$ と表すことができるから，

$$a^3+6=\left(\sqrt{5}-2\right)^3+6=17\sqrt{5}-32$$

となる。

(2)

$$\log_3 x<\log_x 3$$
$$\Leftrightarrow \log_3 x<\frac{1}{\log_3 x}$$

となる。真数および底の条件より，$0<x<1, 1<x$ である。

[1] $x>1$ のとき

$$\log_3 x<\frac{1}{\log_3 x}$$
$$\Leftrightarrow (\log_3 x)^2<1$$
$$\Leftrightarrow (\log_3 x-1)(\log_3 x+1)<0$$
$$\Leftrightarrow -1<\log_3 x<1$$
$$\therefore \frac{1}{3}<x<3$$

となる。したがって，$x>1$ と合わせて $1<x<3$ が得られる。

[2] $0<x<1$ のとき

$$\log_3 x<\frac{1}{\log_3 x}$$
$$\Leftrightarrow (\log_3 x)^2>1$$
$$\Leftrightarrow (\log_3 x-1)(\log_3 x+1)>0$$
$$\Leftrightarrow \log_3 x<-1, 1<\log_3 x$$
$$\therefore x<\frac{1}{3}, 3<x$$

となる。したがって，$0<x<1$ と合わせて，$0<x<\frac{1}{3}$ が得られる。

以上[1], [2]より，求める解は，$0<x<\frac{1}{3}, 1<x<3$ となる。

(3)

連立方程式

$$x^2+x-2=0 \quad ・・・①$$
$$y^2+(-2x)y+(2x-1)=0 \quad ・・・②$$
$$z-(x+y-1)=0 \quad ・・・③$$

を解く。①より，

$$x^2+x-2=0$$
$$\Leftrightarrow (x+2)(x-1)=0$$
$$\therefore x=1, -2$$

である。

[1] $x=1$ のとき

②に $x=1$ を代入して解くと，

$$y^2-2y+1=0$$
$$\Leftrightarrow (y-1)^2=0$$
$$\therefore y=1$$

が得られる。このとき，③より，$z=1$ である。したがって，解は

$$(x, y, z)=(1, 1, 1)$$

となる。

[2] $x=-2$ のとき

②に $x=1$ を代入して解くと，

$$y^2+4y-5=0$$
$$\Leftrightarrow (y+5)(y-1)=0$$
$$\therefore y=1, -5$$

が得られる。このとき，③より，$y=1$ で $z=-2$，$y=-5$ で $z=-8$ となるから，解は

$$(x, y, z)=(-2, 1, -2), (-2, -5, -8)$$

となる。

以上[1], [2]より，求める解は，

$$(x, y, z)=(1, 1, 1), (-2, 1, -2), (-2, -5, -8)$$

である。

(4)

解と係数の関係より

$$\alpha+\beta+\gamma=3, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1, \alpha\beta\gamma=-2 \quad ・・・④$$

である。

1.

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$ と変形できることから，④を代入して，

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3^2-2\cdot 1$$
$$=7$$

が得られる。

2.

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)^3-3(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$ と変形できることから，④を代入して，

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3^3-3\cdot 3\cdot 1+3\cdot(-2)$$
$$=12$$

が得られる。

$\boxed{\text{II}}$

〔解答〕

(1)	23	24	25								
	7	2	2								
(2)	26	27	28	29							
	1	3	1	2							
(3)	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	3	2	−	3	1	8	6	2	2	−	2
	41	42	43	44	45	46	47	48			
	9	1	6	−	1	5	7	2			
(4)	49	50	51	52	53	54	55	56	57		
	−	1	5	4	1	0	2	5	4		

〔解説〕

(1)

$f(x)$ を式変形すると,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2+8x+5}{x-2} \\
&= \frac{(x-2)(x+10)+25}{x-2} \\
&= x+10+\frac{25}{x-2} \\
&= (x-2)+\frac{25}{x-2}+12
\end{aligned}
$$

となる。ここで，$x>2$ より $x-2>0$, $\frac{25}{x-2}>0$ であることから，相加平均と相乗平均の関係を用いて,

$$
\begin{aligned}
&(x-2)+\frac{25}{x-2} \geqq 2\sqrt{(x-2)\cdot\frac{25}{x-2}} \\
&\Leftrightarrow (x-2)+\frac{25}{x-2}+12 \geqq 10+12 \\
&\Leftrightarrow f(x) \geqq 22
\end{aligned}
$$

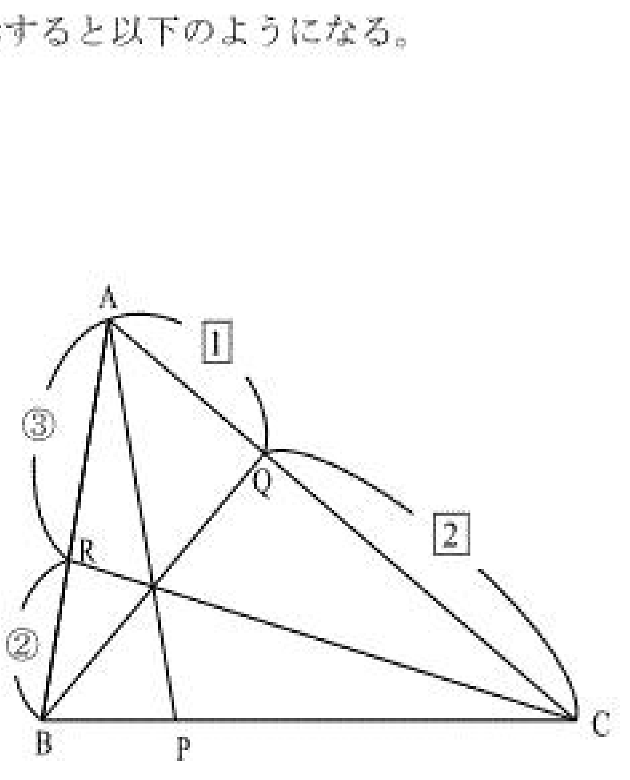
となる。ただし，等号成立は

$$
\begin{aligned}
&x-2=\frac{25}{x-2} \\
&\Leftrightarrow (x-2)^2=25 \\
&\Leftrightarrow x-2=5 \ (\because x-2>0) \\
&\Leftrightarrow x=7
\end{aligned}
$$

より，$x=7$ のときである。したがって，$x>2$ において，$f(x)$ は $x=7$ で最小値 22 をとる。

(2)

$\triangle$ABC，点 P, Q, R を図示すると以下のようになる。



チェバの定理より,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1 \\
&\therefore \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

となる。また，メネラウスの定理より,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{OA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CP}}=1 \\
&\therefore \frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

である。

(3)

$X=\log_2 x$ とおくと，$2 \leqq x \leqq 16$ のとき，$1 \leqq X \leqq 4$ である。このとき,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2(\log_2 4x)^2-4a\log_2 x+a \\
&= 2(\log_2 x+\log_2 4)^2-4a\log_2 x+a \\
&= 2X^2+8X+8-4aX+a \\
&= 2\{X-(a-2)\}^2-2a^2+9a
\end{aligned}
$$

と変形できる。以下，a の値に応じて場合分けを行う。

[1] $a-2 \leqq 1$ すなわち $a \leqq 3$ のとき,
　$X=1$ すなわち $x=2$ で最小値 $f(2)=-3a+18$ をとる。

[2] $1<a-2 \leqq 4$ すなわち $3<a<6$ のとき
　$X=a-2$ すなわち $x=2^{a-2}$ で最小値 $f(a-2)=-2a^2+9a$ をとる。

[3] $a-2>4$ すなわち $a>6$ のとき
　$X=4$ すなわち $x=16$ で最小値 $f(16)=-15a+72$ をとる。

(4)

$$
\begin{aligned}
&z^5=1 \\
&\Leftrightarrow z^5-1=0 \\
&\Leftrightarrow (z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0
\end{aligned}
$$

であるから，解の1つは $z=1$ である。また，$z=0$ は明らかに解でないから，$z \neq 0$ としてよい。このとき,

$$
\begin{aligned}
&z^4+z^3+z^2+z+1=0 \\
&\Leftrightarrow \frac{z^4+z^3+z^2+z+1}{z^2}=0 \\
&\Leftrightarrow z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0 \\
&\Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0 \\
&\Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1=0 \\
&\therefore z+\frac{1}{z}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

が得られる。さらに,

$$
\begin{aligned}
&z+\frac{1}{z}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \\
&\Leftrightarrow z^2-\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}z+1=0 \\
&\Leftrightarrow z=\frac{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}+\sqrt{\frac{6\mp2\sqrt{5}}{4}-4}}{2},\ \frac{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}-\sqrt{\frac{6\mp2\sqrt{5}}{4}-4}}{2} \\
&\Leftrightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{-10\mp2\sqrt{5}}}{4},\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}-\frac{\sqrt{-10\mp2\sqrt{5}}}{4} \\
&\Leftrightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{10\pm2\sqrt{5}}}{4}i,\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}-\frac{\sqrt{10\pm2\sqrt{5}}}{4}i \\
&\therefore z=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\pm\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i,\ \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\pm\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i
\end{aligned}
$$

である。ただし，式中の複号は同順である。

III

〔解答〕

(1)	$\boxed{58}$	$\boxed{59}$	$\boxed{60}$	$\boxed{61}$	$\boxed{62}$	$\boxed{63}$	$\boxed{64}$	$\boxed{65}$	$\boxed{66}$	$\boxed{67}$	$\boxed{68}$	$\boxed{69}$
	1	2	5	5	2	1	5	5	3	7	5	5
(2)	$\boxed{70}$	$\boxed{71}$	$\boxed{72}$	$\boxed{73}$	$\boxed{74}$	$\boxed{75}$	$\boxed{76}$	$\boxed{77}$	$\boxed{78}$	$\boxed{79}$	$\boxed{80}$	
	7	3	2	5	0	0	4	9	1	4	6	
(3)	$\boxed{81}$	$\boxed{82}$	$\boxed{83}$	$\boxed{84}$								
	1	2	1	6								

〔解説〕

(1)

すべての玉を色にかかわらず区別して考えると，玉の取り出し方は同様に確からしい。

1.

3個の玉の色がすべて異なる確率は

$$\frac{{}_6C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_2C_1}{{}_{12}C_3} = \frac{12}{55}$$

である。

2.

3個の玉を同時に取り出すとき，赤玉が出ない確率は

$$\frac{{}_6C_3}{{}_{12}C_3} = \frac{20}{220}$$

であり，白玉が出ない確率は

$$\frac{{}_{10}C_3}{{}_{12}C_3} = \frac{120}{220}$$

である。また，赤玉も白玉も出ない確率は青玉のみが出る確率であるから，

$$\frac{{}_4C_3}{{}_{12}C_3} = \frac{4}{220}$$

である。したがって，赤玉と白玉が少なくとも1つずつ出る確率は，

$$1-\left(\frac{20}{220}+\frac{120}{220}-\frac{4}{220}\right)=\frac{21}{55}$$

となる。

3.

求める確率は，1色のみがでる事象と3色すべてが出る事象の余事象である。3個の玉を同時に取り出すとき、青玉だけが取り出される確率は

$$\frac{{}_4C_3}{{}_{12}C_3} = \frac{4}{220}$$

であり，赤玉だけが取り出される確率は

$$\frac{{}_6C_3}{{}_{12}C_3} = \frac{20}{220}$$

である。また，白玉のみが取り出されることはない。これと 1.で求めた確率より，求める確率は

$$1-\left(\frac{48}{220}+\frac{4}{220}+\frac{20}{220}\right)=\frac{37}{55}$$

となる。

(2)

1.

陽性と判定される確率は，

$$\frac{98}{100}\times\frac{1}{100}+\frac{2}{100}\times\frac{97}{100}=\frac{73}{2500}$$

である。

2.

陽性と判定されたときに，実際には非感染者である確率は，

$$\frac{\frac{98}{100}\times\frac{1}{100}}{\frac{73}{2500}}=\frac{49}{146}$$

である。

(3)

期待値は，

$$E\left(\bar{X}\right)=\frac{1}{2}$$

であり，標準偏差は

$$\sigma\left(\bar{X}\right)=\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{4}}=\frac{1}{6}$$

である。

Ⅳ

(1)

$x^2-tx=x(x-t)$ に注意して t の値によって場合分けを行う。

[1] $t<0$ のとき

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^2 (x^2-tx)\,dx+t \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}tx^2\right]_0^2+t \\ &= -t+\frac{8}{3} \end{aligned}$$

となる。

[2] $0 \leqq t<2$ のとき

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^t -(x^2-tx)\,dx+\int_t^2 (x^2-tx)\,dx+t \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}tx^2\right]_0^t+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}tx^2\right]_t^2+t \\ &= \frac{1}{3}t^3-t+\frac{8}{3} \end{aligned}$$

となる。

[3] $t \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^2 -(x^2-tx)\,dx+t \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}tx^2\right]_0^2+t \\ &= 3t-\frac{8}{3} \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2], [3]より，

$$f(t)=\begin{cases} -t+\dfrac{8}{3} & (t<0) \\ \dfrac{1}{3}t^3-t+\dfrac{8}{3} & (0 \leqq t<2) \\ 3t-\dfrac{8}{3} & (t \geqq 2) \end{cases}$$

が得られる。

(答) $f(t)=\begin{cases} -t+\dfrac{8}{3} & (t<0) \\ \dfrac{1}{3}t^3-t+\dfrac{8}{3} & (0 \leqq t<2) \\ 3t-\dfrac{8}{3} & (t \geqq 2) \end{cases}$

(2)

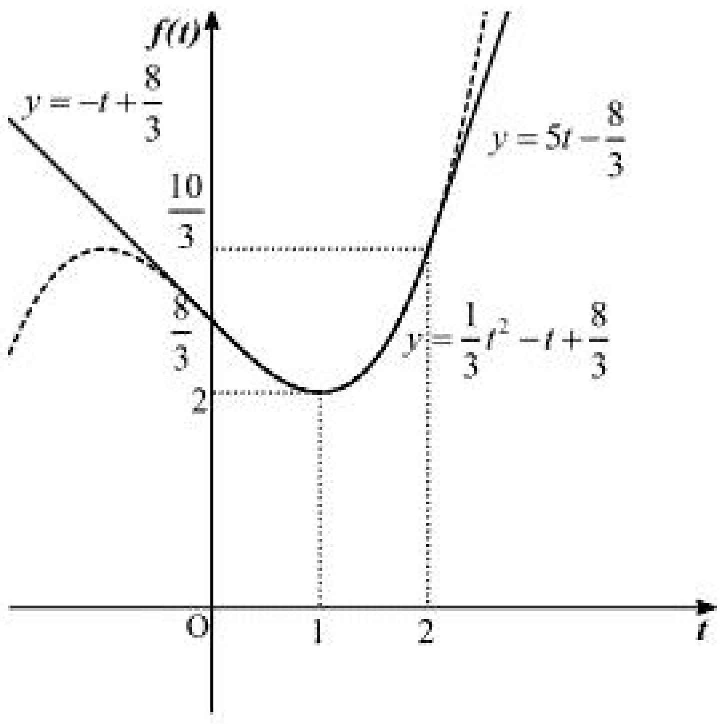
$0<t<2$ において，

$$f'(t)=t^2-1=(t-1)(t+1)$$

であるから，$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$	(-1)		$-$	0	$+$		(3)
$f(t)$	↘	$\frac{8}{3}$	↘	2	↗	$\frac{10}{3}$	↗

したがって，グラフの概形は次の実線部分のようになる。



(答) 前図

(3)

(2)より，$f(t)$ は $t=1$ で最小値 2 をとる。

(答) $t=1$ のとき最小値 2