I

〔解答〕

(1)	$\boxed{1}$	
	5	
(2)	$\boxed{2}$	
	5	
(3)	$\boxed{3}$	
	7	
(4)	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$
	1	0

〔解説〕

(1)

ポンプA，ポンプBを使う回数をそれぞれm, n回とする。ただし，m, nは0以上の整数である。いま$(m+n)$回で水が11リットル貯まるとき，

$$7m-5n=11 \quad \cdots ①$$

が成立する。ここで，

$$7\cdot 3-5\cdot 2=11 \quad \cdots ②$$

が成立するので，①－②より，

$$7(m-3)-5(n-2)=0$$
$$\Leftrightarrow 7(m-3)=5(n-2)$$

となる。いま，5と7は互いに素であるから，整数kを用いて，

$$m-3=5k \Leftrightarrow m=5k+3$$
$$n-2=7k \Leftrightarrow n=7k+2$$

が成立する。したがって，2つのポンプの作動回数は

$$m+n=(5k+3)+(7k+2)=12k+5\,(回)$$

である。ゆえに，$m \geqq 0, n \geqq 0, m+n \geqq 0$より，$m+n$は，$k=0$すなわち$(m, n)=(3, 2)$のとき最小値5をとる。逆に，ポンプAを3回連続で作動させた後，ポンプBを2回連続で作動させたとき，問題の条件を満たしかつ水は11リットル貯まる。よって，11リットルの水を貯めるのに必要なポンプの作動回数の最小回数は5である。

(2)

ポンプAを3回，ポンプBを2回作動させることを考える。Aを3個，Bを2個の5個を1列に並べる順列の数は，

$$\frac{5!}{3!2!}=10\,(通り)$$

である。このうち，この順番でポンプを作動させることができない順列は，初めにBが並ぶ順列と，初めにAが並びその後2回続けてBが並ぶ順列である。初めにBが並ぶ順列の数は，Aを3個，Bを1個の4個を1列に並べる順列の数に等しく，

$$\frac{4!}{3!1!}=4\,(通り)$$

である。初めにAが並びその後2回続けてBが並ぶ順列は，Aを2個を1列に並べる順列の数に等しく，

$$\frac{2!}{2!}=1\,(通り)$$

である。よって，求める作動順序の数は

$$10-4-1=5\,(通り)$$

である。

(3)

(1)と同様に，ポンプA，ポンプBを使う回数をそれぞれm, n回とする。ただし，m, nは0以上の整数である。いま$(m+n)$回で水が13リットル貯まるとき，

$$7m-5n=13 \quad \cdots ①$$

が成立する。ここで，

$$7\cdot 4-5\cdot 3=13 \quad \cdots ②$$

が成立するので，①－②より，

$$7(m-4)-5(n-3)=0$$
$$\Leftrightarrow 7(m-4)=5(n-3)$$

となる。いま，5と7は互いに素であるから，整数lを用いて，

$$m-4=5l \Leftrightarrow m=5l+4$$
$$n-3=7l \Leftrightarrow n=7l+3$$

が成立する。したがって，2つのポンプの作動回数は

$$m+n=(5l+4)+(7l+3)=12l+7\,(回)$$

である。ゆえに，$m \geqq 0, n \geqq 0, m+n \geqq 0$より，$m+n$は，$l=0$すなわち$(m, n)=(4, 3)$のとき最小値7をとる。逆に，例えばA, A, A, B, B, B, Aの順序でポンプを作動させたとき，問題の条件を満たしかつ水は13リットル貯まる。よって，13リットルの水を貯めるのに必要なポンプの作動回数の最小回数は7である。

(4)

ポンプAを4回，ポンプBを3回作動させて水を13リットル貯めることを考える。7回目にどちらのポンプを作動させるかで場合分けして考える。

[1] 7回目にポンプAを作動させる場合

6回ポンプを作動させたとき，水は6リットル貯まっている。このとき，6回目に作動させたのはポンプBであり，5回ポンプを作動させたとき，水は11リットル貯まっている。初めの5回でポンプAを3回，ポンプBを2回作動させ，水を11リットル貯める作動順序は，(2)より5通りである。よってこの場合の作動順序は5通りである。

[2] 7回目にポンプBを作動させる場合

6回ポンプを作動させたとき，水は18リットル貯まっている。このとき，6回目に作動させたのはポンプAであり，5回ポンプを作動させたとき，水は11リットル貯まっている。初めの5回でポンプAを3回，ポンプBを2回作動させ，水を11リットル貯める作動順序は，(2)より5通りである。よってこの場合の作動順序は5通りである。

以上，[1], [2]より求める作動順序の数は

$$5+5=10\,(通り)$$

である。

II

〔解答〕

(1)	$\boxed{6}$				
	9				
(2)	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	$\boxed{10}$	
	−	2	1	5	
(3)	$\boxed{11}$	$\boxed{12}$	$\boxed{13}$	$\boxed{14}$	$\boxed{15}$
	2	1	0	2	1

〔解説〕

(1)

$P(x)$ を $(x-3)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$ とおくと，余りが $2x+3$ であることから，$P(x)$ は

$$P(x)=(x-3)^2Q(x)+2x+3 \qquad \cdots①$$

とおける。剰余の定理より，$P(x)$ を $x-3$ で割ったときの余りは $P(3)$ であるから，①に $x=3$ を代入して，

$$P(3)=0\cdot Q(3)+2\cdot 3+3=9$$

となる。よって，$P(x)$ を $x-3$ で割ったときの余りは 9 である。

(2)

$P(x)$ を $(x-1)(x-3)$ で割ったときの商と余りをそれぞれ，$R(x)$, $ax+b$ (a, b は実数)とおくと，$P(x)$ は，

$$P(x)=(x-1)(x-3)R(x)+ax+b \qquad \cdots②$$

とおける。いま，$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りが 13，(1)より $P(x)$ を $x-3$ で割ったときの余りが 9 であるから，剰余の定理より，

$$P(1)=13$$
$$\Leftrightarrow 0\cdot R(1)+a\cdot 1+b=13$$
$$\Leftrightarrow a+b=13 \qquad \cdots③$$
$$P(3)=9$$
$$\Leftrightarrow 0\cdot R(3)+a\cdot 3+b=9$$
$$\Leftrightarrow 3a+b=9 \qquad \cdots④$$

が成立する。これより，③，④を解いて，

$$(a,\ b)=(-2,\ 15)$$

となる。よって，$P(x)$ を $(x-1)(x-3)$ で割ったときの余りは，$-2x+15$ である。

(3)

(1)で定義した $Q(x)$ を $x-1$ で割ったときの商と余りをそれぞれ，$S(x)$, c (c は実数)とおくと，$P(x)$ は，

$$P(x)=(x-3)^2\{(x-1)S(x)+c\}+2x+3$$

$$=(x-1)(x-3)^2S(x)+c(x-3)^2+2x+3 \qquad \cdots⑤$$

と変形できる。これより，$P(x)$ を $(x-1)(x-3)^2$ で割ったときの余りは $c(x-3)^2+2x+3$ である。

ここで，$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りは 13 であるから，剰余の定理より，⑤に $x=1$ を代入して，

$$P(1)=13$$
$$\Leftrightarrow 0\cdot S(1)+c(1-3)^2+2\cdot 1+3=13$$
$$\Leftrightarrow 4c+5=13$$
$$\Leftrightarrow c=2$$

となる。よって，$P(x)$ を $(x-1)(x-3)^2$ で割ったときの余りは

$$2(x-3)^2+2x+3=2x^2-10x+21$$

である。

III

〔解答〕

$\boxed{16}$	$\boxed{17}$	$\boxed{18}$	$\boxed{19}$	$\boxed{20}$	$\boxed{21}$	$\boxed{22}$	$\boxed{23}$	$\boxed{24}$
1	4	1	7	1	1	0	2	3

〔解説〕

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{a_n}{1+3a_n}$$

より，$n=2,3,4$ のとき，a_n は

$$a_2=\frac{a_1}{1+3a_1}=\frac{1}{1+3}=\frac{1}{4}$$

$$a_3=\frac{a_2}{1+3a_2}=\frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{3}{4}}=\frac{1}{7}$$

$$a_4=\frac{a_3}{1+3a_3}=\frac{\frac{1}{7}}{1+\frac{3}{7}}=\frac{1}{10}$$

となる。また，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+3a_n}$ について，$a_{n+1}=0$ とすると $a_n=0$ となる。よって、ある自然数 n において $a_n=0$ であるとすると $a_{n-1}=0$ となり，同様にして帰納的に $a_n=a_{n-1}=\cdots=a_1=0$ となる。しかし，これは $a_1=1$ と矛盾するから，すべての自然数 n について $a_n\neq 0$ である。よって逆数をとってよく，

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1+3a_n}{a_n}=\frac{1}{a_n}+3$$

となる。ここで $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと，$b_{n+1}=b_n+3$ である。したがって，数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=\dfrac{1}{a_1}=1$，公差3の等差数列であるので，

$$b_n=1+3(n-1)=3n-2 \Leftrightarrow \frac{1}{a_n}=3n-2 \Leftrightarrow a_n=\frac{1}{3n-2}$$

が成立する。ゆえに数列 $\{a_n\}$ の一般項は $\dfrac{1}{3n-2}$ である。したがって，$a_n<0.015$ となるのは，

$$\begin{aligned}
&a_n<0.015\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{3n-2}<\frac{15}{1000}\\
&\Leftrightarrow 1000<15(3n-2)\\
&\Leftrightarrow 45n>1030\\
&\Leftrightarrow n>\frac{1030}{45}=22+\frac{40}{45}\\
&\therefore n\geqq 23\ \ (\because n\text{は自然数})
\end{aligned}$$

の場合である。よって，$a_n<0.015$ となる最小の自然数は $n=23$ である。

IV

〔解答〕

$\boxed{25}$	$\boxed{26}$	$\boxed{27}$	$\boxed{28}$	$\boxed{29}$	$\boxed{30}$	$\boxed{31}$
−	9	5	2	7	1	5

〔解説〕

$y=x^3+x^2-6x+3$ と $y=2x+k$ から y を消去すると,

$$x^3+x^2-6x+3=2x+k$$
$$\Leftrightarrow x^3+x^2-8x+3=k$$

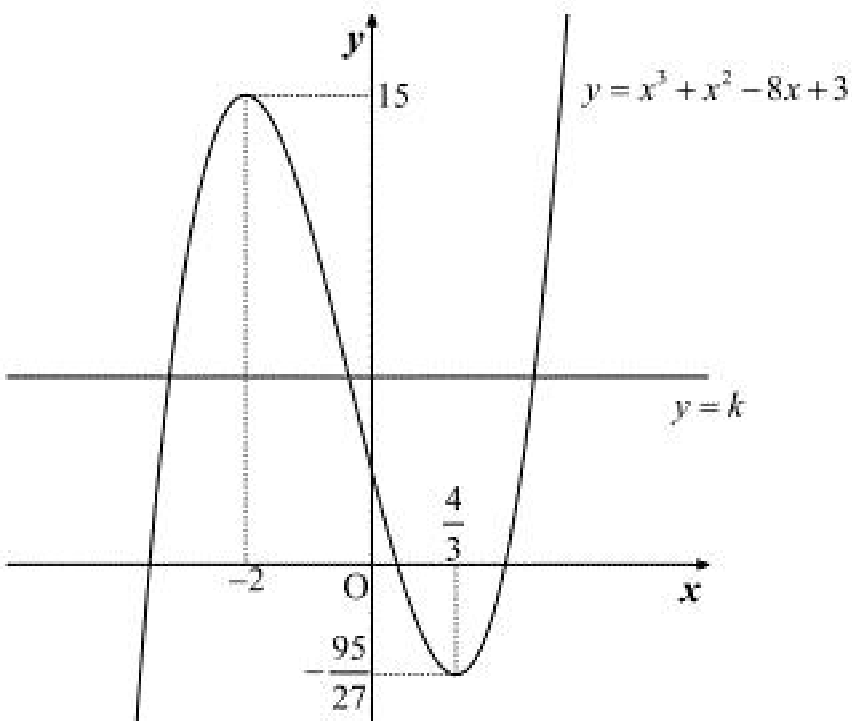
が成立する。これより，3 次関数 $y=x^3+x^2-6x+3$ と直線 $y=2x+k$ のグラフの共有点の個数は，3 次関数 $y=x^3+x^2-8x+3$ と直線 $y=k$ のグラフの共有点の個数に等しい。ここで，3 次関数 $y=x^3+x^2-8x+3$ のグラフを考える。$f(x)=x^3+x^2-8x+3$ とおくと,

$$f'(x)=3x^2+2x-8=(3x-4)(x+2)$$

より，$f'(x)=0$ となるのは，$x=\dfrac{4}{3}, -2$ のときである。ゆえに，増減表は下表のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\dfrac{4}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

これより，$f(x)$ は $x=-2$ で極大値 $f(-2)=15$，$x=\dfrac{4}{3}$ で極小値 $f\left(\dfrac{4}{3}\right)=-\dfrac{95}{27}$ をとる。したがって，3 次関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ は下図のようになる。



よって，上のグラフより，3 次関数 $y=x^3+x^2-8x+3$ のグラフと直線 $y=k$ が 3 つの相異なる共有点をもつのは,

$$-\frac{95}{27}<k<15$$

のときである。つまり，3 次関数 $y=x^3+x^2-6x+3$ のグラフと直線 $y=2x+k$ が 3 つの相異なる共有点をもつような k の値の範囲は $-\dfrac{95}{27}<k<15$ である。