

〔解答〕

(1)	1	2	3	4	5
	9	1	2	1	6
(2)	6	7	8		
	7	2	4		
(3)	9	10	11		
	1	3	6		
(4)	12	13	14	15	
	5	1	0	8	

〔解説〕

(1)

まず、さいころの1から6の目が出る事象はそれぞれ同様に確からしいから、 X, Y, Z は、1

以上6以下の自然数をそれぞれ $\frac{1}{6}$ の確率でとる。したがって、 $X-3, Y-3, Z-3$ は、

$-2, -1, 0, 1, 2, 3$ をそれぞれ $\frac{1}{6}$ の確率でとる。 $U=0$ となるとき、「 $X-3, Y-3, Z-3$ のうち少

なくとも一つが0」である。その余事象は $X-3, Y-3, Z-3$ すべてが0以外の値をとることで

あり、確率は $\left(\frac{5}{6}\right)^3$ である。以上より、 $U=0$ となる確率は、

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216}$$

である。

(2)

$U>0$ となるとき、「 $X-3, Y-3, Z-3$ がすべて正」であるか、もしくは「どれか一つが正で

あり、それ以外は負」である。以上より、 $U>0$ となる確率は、

$$\left(\frac{3}{6}\right)^3 + {}_3C_1 \cdot \frac{3}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{7}{24}$$

である。

(3)

$U=12$ となるとき、 $X-3, Y-3, Z-3$ は2, 2, 3もしくは $-2, -2, 3$ の組み合わせである。よっ

て、求める確率は

$${}_3C_1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + {}_3C_1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

となる。

(4)

$U>10$ となるとき、 U のとり得る値は12, 18, 27のみである。 $U=27$ となるとき、

$X-3, Y-3, Z-3$ は3, 3, 3の組み合わせであるから、 $U=27$ となる確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$$

である。 $U=18$ となるとき、 $X-3, Y-3, Z-3$ は2, 3, 3の組み合わせであるから、 $U=18$ と

なる確率は

$${}_3C_1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{72}$$

である。(3)より、 $U=12$ となる確率は $\frac{1}{36}$ である。以上より、 $U>10$ となる確率は

$$\frac{1}{216} + \frac{1}{72} + \frac{1}{36} = \frac{5}{108}$$

である。

Ⅱ

【解答】

(1)	16	17	18	
	8	5	0	
(2)	19	20	21	22
	5	9	5	2

【解説】

(1)

まず,

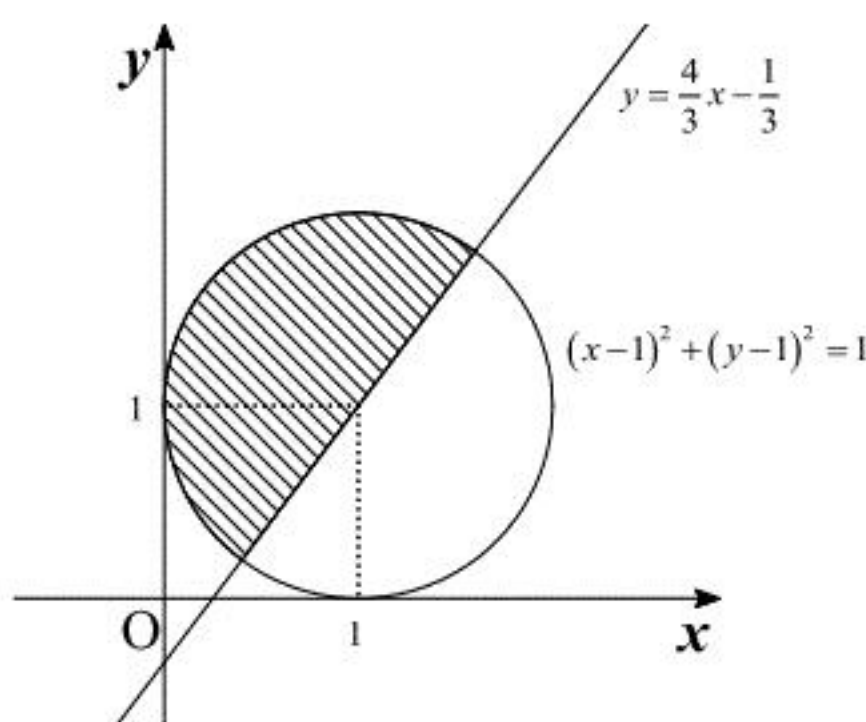
$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$$

であるから, $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 \leq 0$ は中心 $(1, 1)$, 半径1の円の内部および周上を表す。また,

$4x - 3y - 1 \leq 0 \Leftrightarrow y \geq \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ である。したがって, 領域 D は下図の斜線部となる。ただし, 境界線を含む。



上図より, 点 (x, y) が領域 D 上にあるとき, x の最小値は0である。また, x の最大値は, 円

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ と直線 $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ の交点の x 座標の中で最大のものである。

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ に $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ を代入すると,

$$(x-1)^2 + \left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{3} - 1\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \frac{16}{9}(x-1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{9}(x-1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = \frac{9}{25}$$

$$\Leftrightarrow x-1 = \pm \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{5}, \frac{8}{5}$$

を得る。よって, x の最大値は $\frac{8}{5}$ である。

(2)

円 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ を円 C_1 とおく。円 C_1 と直線 $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ の交点について, y 座標は

$$x = \frac{2}{5} \text{ のとき } y = \frac{1}{5}$$

$$x = \frac{8}{5} \text{ のとき } y = \frac{9}{5}$$

である。ここで, 実数 k を用いて, $4x + 3y = k$ とおき, 直線 $4x + 3y = k$ を直線 l とおく。まず, 直線 l と円 C_1 が接するとき, 直線 l と円 C_1 の中心 $(1, 1)$ の距離が1であり, 直線と点の距離の公式より,

$$\frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - k|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow |7 - k| = 5$$

$$\Leftrightarrow k = 2, 12$$

である。 $k = 2$ のとき, 直線 l と円 C_1 の接点の座標について,

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

であり, これは(1)より領域 D 上の点である。 $k = 12$ のとき, 直線 l と円 C_1 の接点の座標について,

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \\ 4x + 3y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

であり, これは(1)より領域 D 上の点ではない。以上より, (1)の図とあわせて, k が最大値をとるのは直線 l が点 $\left(\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right)$ を通るときで, このとき, $k = 4 \cdot \frac{8}{5} + 3 \cdot \frac{9}{5} = \frac{59}{5}$ である。次に, k が最小

値をとるのは, 直線 l が点 $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ を通るとき, または, $x < 1$ において直線 l が円 C_1 に接する

ときである。直線 l が点 $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ を通るとき, $k = 4 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{11}{5}$ であり, 直線 l と円 C_1 が $x < 1$

において接するとき, $k = 2$ であったから, $2 < \frac{11}{5}$ より, k の最小値は2である。以上より, k

の最大値は $\frac{59}{5}$, 最小値は2である。

Ⅲ

〔解答〕

(1)	23	24	25	26
	6	5	4	1
(2)	27	28	29	
	1	2	5	
(3)	30	31		
	4	1		
(4)	32	33	34	
	1	4	7	
(5)	35	36	37	38
	3	7	2	4

〔解説〕

(1)

数列 A は、初項が 1、公差が 6 の等差数列であるから、

$$a_n = 1 + 6(n - 1) = 6n - 5$$

である。数列 B は、初項が 3、公差が 4 の等差数列であるから、

$$b_n = 3 + 4(n - 1) = 4n - 1$$

である。

(2)

A: 1, 7, 13, 19, … であり、B: 3, 7, 11, 15, … であるから、数列 A, B の両方に現れる最も小さい数は 7 である。また、数列 A, B の公差がそれぞれ 6 と 4 であり、その最小公倍数は 12 であるから、数列 A, B にともに現れる数は、0 以上の整数 l を用いて $7 + 12l$ と表される。以上より、 $\{c_n\}$ は初項 7、公差が 12 の等差数列であり、

$$c_n = 7 + 12(n - 1) = 12n - 5$$

である。

(3)

数列 A, B の公差が、それぞれ 6 と 4 であり、その最小公倍数は 12 であるから、任意の d_m (m は自然数) について、 $d_m + 12$ も $\{d_n\}$ に含まれる。 $\{d_n\}$ の項を書き出すと、

$$\begin{aligned} d_1 &= 1, d_2 = 3, d_3 = 7, d_4 = 11, \\ d_5 &= 13, d_6 = 15, d_7 = 19, d_8 = 23, \dots \end{aligned}$$

となる。よって、 l を自然数として

$$\begin{aligned} d_n &= \begin{cases} 1 + 12(l - 1) & (n = 4l - 3) \\ 3 + 12(l - 1) & (n = 4l - 2) \\ 7 + 12(l - 1) & (n = 4l - 1) \\ 11 + 12(l - 1) & (n = 4l) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 12l - 11 & (n = 4l - 3) \\ 12l - 9 & (n = 4l - 2) \\ 12l - 5 & (n = 4l - 1) \\ 12l - 1 & (n = 4l) \end{cases} \end{aligned}$$

のように書ける。よって、(2) とあわせて、 $d_n = c_k$ が成立するのは $n = 4l - 1$ のときであり、このとき、

$$\begin{aligned} d_n &= c_k \\ \Leftrightarrow 7 + 12(l - 1) &= 12k - 5 \\ \Leftrightarrow 12 \cdot \frac{n+1}{4} &= 12k \quad (\because n = 4l - 1) \\ \Leftrightarrow n &= 4k - 1 \end{aligned}$$

である。

(4)

$n = 50$ のとき $n = 4 \cdot 13 - 2$ であるので (3) より $l = 13$ として

$$d_{50} = 12 \cdot 13 - 9 = 147$$

である。

(5)

$n = 49$ のとき $n = 4 \cdot 13 - 3$ であるので (3) より $l = 13$ として

$$d_{49} = 12 \cdot 13 - 11 = 145$$

である。以上より、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{50} d_n &= \{d_1 + d_2 + d_3 + d_4\} + \dots + \{d_{45} + d_{46} + d_{47} + d_{48}\} + d_{49} + d_{50} \\ &= \sum_{l=1}^{12} \{(12l - 11) + (12l - 9) + (12l - 5) + (12l - 1)\} + d_{49} + d_{50} \\ &= \sum_{l=1}^{12} (48l - 26) + 145 + 147 \\ &= \frac{1}{2} (22 + 550) \cdot 12 + 145 + 147 \\ &= 3432 + 145 + 147 \\ &= 3724 \end{aligned}$$

である。

IV

〔解答〕

(1)	39	40	41	42	43	44	45	46
	4	−	1	8	2	4	−	9
(2)	47	48						
	5	2						

〔解説〕

(1)

$f(x)$ は $x=1$ で極大値 1 をとることから

$$f(1)=1$$

$$\Leftrightarrow a+b+c+d=1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

であり、 $x=2$ で極小値 -1 をとることから

$$f(2)=-1$$

$$\Leftrightarrow 8a+4b+2c+d=-1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。また、 $f(x)$ を x で微分すると

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

であり、 $f(x)$ は $x=1, 2$ で極値をとることから、

$$\begin{cases} f'(1)=0 \\ f'(2)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b+c=0 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-\frac{9}{2}a \\ c=6a \end{cases} \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。③を①および②に代入して

$$\begin{cases} a-\frac{9}{2}a+6a+d=1 \\ 8a-18a+12a+d=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}a+d=1 \\ 2a+d=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ d=-9 \end{cases}$$

となる。このとき、③から $b=-\frac{9}{2}a=-18$, $c=6a=24$ となる。

(2)

$f(x)$ は $x=1$ で極大値 1 をとるから、曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(1, 1)$ における接線の方程式は

$$y=1$$

であり、 $y=1$ と $y=f(x)$ との共有点の x 座標は

$$1=4x^3-18x^2+24x-9$$

$$\Leftrightarrow 4x^3-18x^2+24x-10=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^3-9x^2+12x-5=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x^2-7x+5)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(2x-5)=0$$

$$\therefore x=1, \frac{5}{2}$$

となる。したがって、共有点のうち $(1, 1)$ 以外のものの x 座標は $x=\frac{5}{2}$ である。