

〔解答〕

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
3	-	5	1	-	1	2

〔解説〕

$f(x) = x^3 + x^2 + ax + b$ を $(x-1)^2$, $(x+1)^2$ で割ると,

$$f(x) = (x-1)^2(x+3) + (a+5)x + b - 3$$

$$f(x) = (x+1)^2(x-1) + (a+1)x + b + 1$$

となるから,

$$R(x) = (a+5)x + b - 3$$

$$Q(x) = (a+1)x + b + 1$$

と表せる。ここで、 $R(x) = 2Q(x)$ は x についての恒等式であるから,

$$R(x) = 2Q(x)$$

$$\Leftrightarrow (a+5)x + b - 3 = (2a+2)x + 2b + 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+5 = 2a+2 \\ b-3 = 2b+2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \end{cases}$$

である。よって、 $f(x) = x^3 + x^2 + 3x - 5$ であり、方程式 $f(x) = 0$ の解は,

$$x^3 + x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 2x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \text{ または } x^2 + 2x + 5 = 0$$

$$\therefore x = 1, -1 \pm 2i$$

である。

Ⅱ

〔解答〕

(1)	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$
	1	1	2	8
(2)	$\boxed{12}$	$\boxed{13}$	$\boxed{14}$	$\boxed{15}$
	1	5	1	6
(3)	$\boxed{16}$	$\boxed{17}$	$\boxed{18}$	
	1	1	6	

〔解説〕

(1)

A の投げたさいころの目が1のとき、A が勝つようなコインの裏表の出方は、「A が表を1枚出し、B が裏を6枚出す場合」のみである。その確率は

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{128}$$

である。

(2)

6枚のコインを投げて、「表を出さない」および「表を1枚出す」確率はそれぞれ

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

$${}_6C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{32}$$

である。A の投げたさいころの目が6のとき、A が勝つようなコインの裏表の出方は、「A が表を2枚以上出す場合」または「A が表を1枚出し、B が表を出さない場合」である。ゆえに、求める確率は

$$\left(1 - \frac{1}{64} - \frac{3}{32}\right) + \left(\frac{3}{32} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{15}{16}$$

である。

(3)

A の投げたさいころの目が2のとき、A が勝つようなコインの裏表の出方を、A が表を出す枚数で場合分けして考える。

[1] A が表を出さないとき

このときA が勝つことはない。

[2] A が表を1枚出すとき

このとき、「B が表を出さない場合」にA が勝つ。この確率は

$${}_2C_1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{64}$$

である。

[3] A が表を2枚出すとき

このとき、「B が表を出さない場合」または「B が表を1枚出す場合」にA が勝つ。この確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}_5C_1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^4 \right\} = \frac{3}{64}$$

である。

以上[1], [2], [3]より、求める確率は

$$0 + \frac{1}{64} + \frac{3}{64} = \frac{1}{16}$$

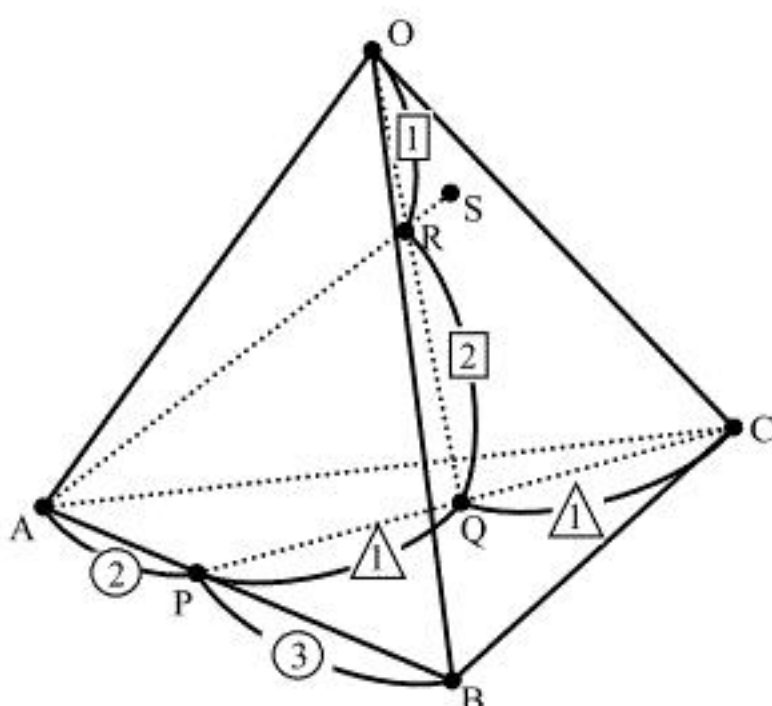
である。

Ⅲ

〔解答〕

(1)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
	3	5	2	5	3	1	0	1	5	1	2
(2)	30	31	32	33	34	35	36	37			
	9	1	0	1	1	5	1	6			
(3)	38	39	40	41	42	43					
	2	2	7	5	2	7					

〔解説〕



(1)

点Pは線分ABを2:3に内分するので、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{2+3} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$

と表せる。また、点Qは線分CPの中点であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \frac{\overrightarrow{OP} + \vec{c}}{1+1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} \right) + \frac{1}{2}\vec{c} \\ &= \frac{3}{10}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\end{aligned}$$

と表せる。

(2)

点Rは線分OQを1:2に内分するので、

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OQ}$$

と表せる。よって $\overrightarrow{AR}$ は、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AR} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OR} \\ &= -\vec{a} + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{10}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \right) \\ &= -\frac{9}{10}\vec{a} + \frac{1}{15}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}\end{aligned}$$

と表せる。

(3)

点Sは直線AR上にあるので、実数 k を用いて、

$$\overrightarrow{AS} = k\overrightarrow{AR}$$

と表せる。 k を用いて $\overrightarrow{OS}$ を表すと、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} \\ &= \vec{a} + k \left(-\frac{9}{10}\vec{a} + \frac{1}{15}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c} \right) \\ &= \left(1 - \frac{9}{10}k \right) \vec{a} + \frac{k}{15}\vec{b} + \frac{k}{6}\vec{c}\end{aligned}$$

となる。点Sは $\triangle OBC$ 上にあるので、 $\overrightarrow{OS}$ は $\vec{a}$ を用いずに表せる。よって、 k は、

$$1 - \frac{9}{10}k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{10}{9}$$

となる。よって $\overrightarrow{OS}$ は、

$$\overrightarrow{OS} = \frac{2}{27}\vec{b} + \frac{5}{27}\vec{c}$$

となる。

IV

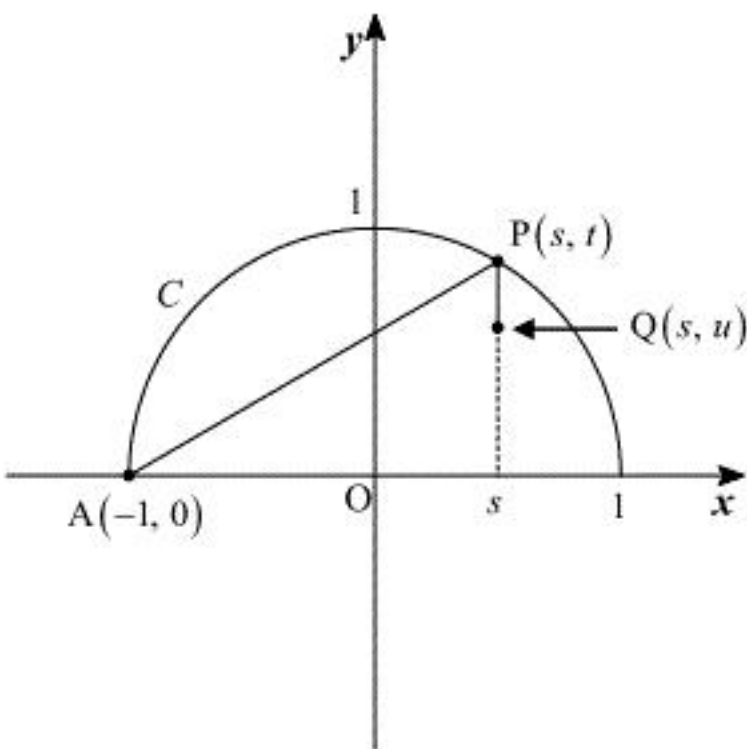
【解答】

(1)	44	45				
	2	2				
(2)	46	47	48	49	50	51
	1	2	2	1	2	2
(3)	52	53	54	55	56	57
	1	2	3	2	3	2
(4)	58	59				
	4	3				

【解説】

(1)

曲線 C と 3 点 A, P, Q は以下のように図示される。



点 P は曲線 C 上の点であるから、

$$s^2+t^2=1 \quad (t \geq 0) \qquad \cdots \textcircled{1}$$

が成立する。したがって、線分 AP の長さを s で表すと

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{\{s-(-1)\}^2+t^2} \\ &= \sqrt{(s^2+t^2)+2s+1} \\ &= \sqrt{1+2s+1} \\ &= \sqrt{2+2s} \end{aligned}$$

となる。

(2)

$u \leq t$ が常に成立しているため、 $PQ=t-u$ である。また、 $\textcircled{1}$ より

$$t=\sqrt{1-s^2}$$

である。したがって、 u を s で表すと

$$\begin{aligned} AP+PQ &= 2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2+2s}+t-u &= 2 \\ \Leftrightarrow u &= t+\sqrt{2+2s}-2 \\ \Leftrightarrow u &= \sqrt{1-s^2}+\sqrt{2+2s}-2 \end{aligned}$$

となる。よって、 u を s で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= \frac{-2s}{2\sqrt{1-s^2}}+\frac{2}{2\sqrt{2+2s}} \\ &= \frac{-s}{\sqrt{(1-s)(1+s)}}+\frac{1}{\sqrt{2(1+s)}} \\ &= \frac{-\sqrt{2s}+\sqrt{1-s}}{\sqrt{2(1+s)(1-s)}} \\ &= \frac{-\sqrt{2s}+\sqrt{1-s}}{\sqrt{2-2s^2}} \end{aligned}$$

となる。

(3)

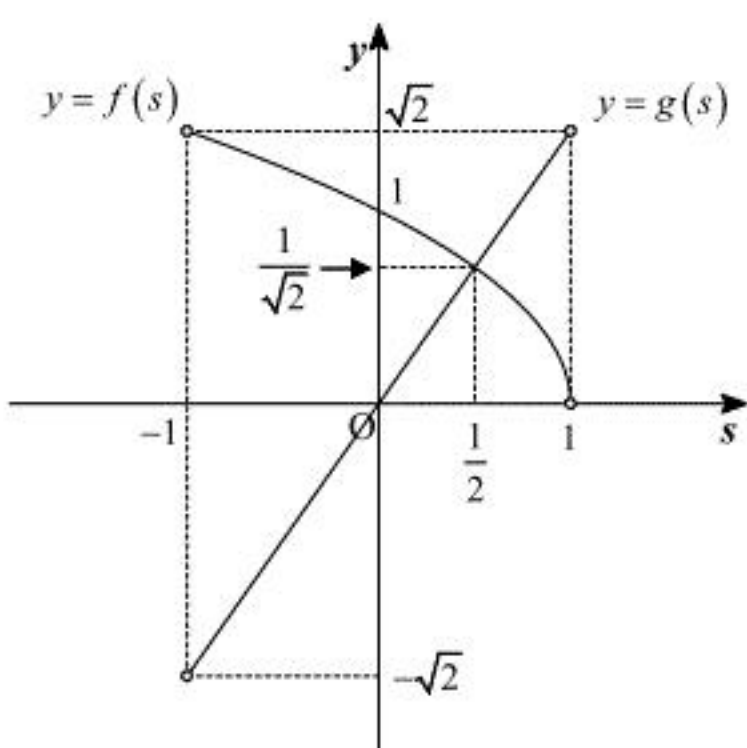
$f(s)=\sqrt{1-s} \ (-1 < s < 1)$, $g(s)=\sqrt{2s} \ (-1 < s < 1)$ とおくと、(2)の結果より

$$\frac{du}{ds}=\frac{f(s)-g(s)}{\sqrt{2-2s^2}}$$

と表せる。 $\sqrt{2-2s^2} > 0$ より、 $\frac{du}{ds}$ の符号は $f(s)-g(s)$ の符号に一致する。ここで、

$$\begin{aligned} f(s)-g(s) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{1-s} &= \sqrt{2s} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1-s=2s^2 \\ s>0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (s+1)(2s-1)=0 \\ s>0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow s &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。したがって、 $y=f(s), y=g(s)$ のグラフは以下のように図示される。



上図より、 $-1 \leq s \leq 1$ における u の増減表は以下のようになる。

s	-1	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$\frac{du}{ds}$		+	0	-	
u	-2	↗	$\frac{3}{2}\sqrt{3}-2$	↘	0

増減表より、 u は $s=\frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{3}{2}\sqrt{3}-2$ をとる。

(4)

求める面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 PQds \\ &= \int_{-1}^1 (2-AP)ds \\ &= \int_{-1}^1 \left(2-\sqrt{2+2s}\right)ds \\ &= \left[2s-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(2+2s)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^1 \\ &= 2\cdot 2-\frac{1}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

と計算できる。

【解答】

(1)	60	61	62	63
	2	3	1	3
(2)	64	65		
	1	6		
(3)	66	67	68	69
	2	3	3	3

【解説】

(1)

2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ の交点の x 座標は

$$\begin{aligned}\sin x + \sqrt{3} \cos x &= 2 \sin x \\ \Leftrightarrow \sin x - \sqrt{3} \cos x &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \sin \left(x - \frac{1}{3} \pi \right) &= 0\end{aligned}$$

を満たす。ここで、 $-\pi \leq x \leq \pi$ より $-\frac{4}{3}\pi \leq x - \frac{1}{3}\pi \leq \frac{2}{3}\pi$ であるから、2 曲線

$y = f(x)$, $y = g(x)$ の交点の x 座標は

$$\begin{aligned}x - \frac{1}{3}\pi &= -\pi, 0 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi\end{aligned}$$

である。

(2)

2 曲線 $y = f(x)$, $y = -g(x)$ の交点の x 座標は

$$\begin{aligned}\sin x + \sqrt{3} \cos x &= -2 \sin x \\ \Leftrightarrow 3 \sin x + \sqrt{3} \cos x &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{3} \sin \left(x + \frac{1}{6}\pi \right) &= 0\end{aligned}$$

を満たす。ここで、 $-\frac{2}{3}\pi \leq x \leq \frac{1}{3}\pi$ より $-\frac{1}{2}\pi \leq x + \frac{1}{6}\pi \leq \frac{1}{2}\pi$ であるから、2 曲線

$y = f(x)$, $y = -g(x)$ の交点の x 座標は

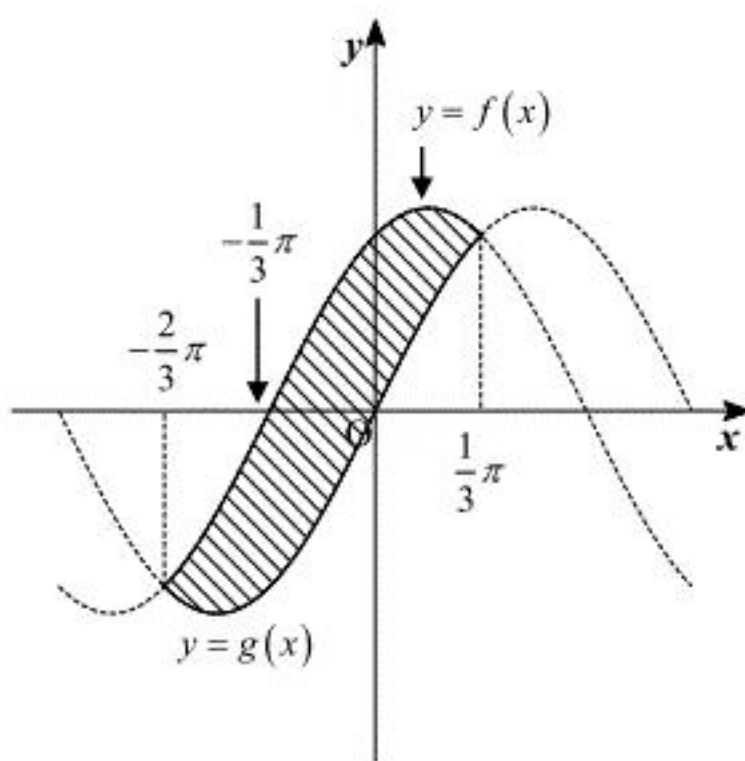
$$\begin{aligned}x + \frac{1}{6}\pi &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{1}{6}\pi\end{aligned}$$

である。

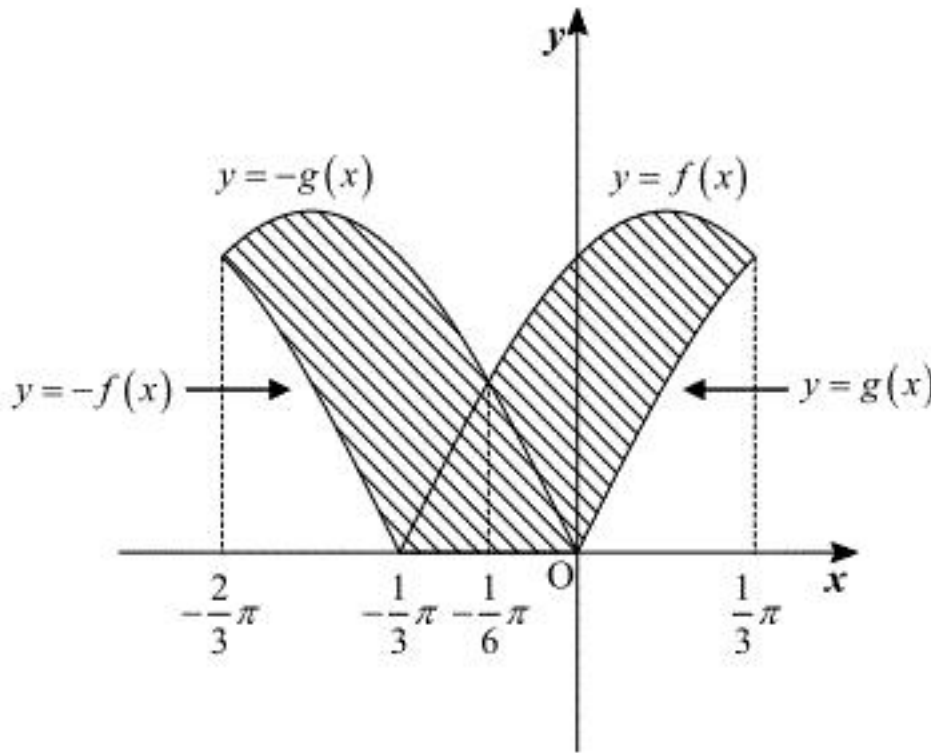
(3)

$f(x) = 2 \sin \left(x + \frac{1}{3}\pi \right)$, $g(x) = 2 \sin x$ より、 $-\frac{2}{3}\pi \leq x \leq \frac{1}{3}\pi$ において 2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$

のグラフで囲まれた図形は下図の斜線部のようにになる。



上図の斜線部を x 軸に関して折り返すと下図の斜線部のようにになる。



上図の斜線部を x 軸に関して回転させてできる回転体の体積を求めれば良い。ここで、 C_1 , C_2 を積分定数とすると

$$\begin{aligned}\int \{f(x)\}^2 dx &= \int 4 \sin^2 \left(x + \frac{1}{3}\pi \right) dx \\ &= \int \left[2 - 2 \cos \left\{ 2 \left(x + \frac{1}{3}\pi \right) \right\} \right] dx \\ &= 2x - \sin \left\{ 2 \left(x + \frac{1}{3}\pi \right) \right\} + C_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \{g(x)\}^2 dx &= \int 4 \sin^2 x dx \\ &= \int (2 - 2 \cos 2x) dx \\ &= 2x - \sin 2x + C_2\end{aligned}$$

となる。したがって、求める回転体の体積を V とおくと

$$\begin{aligned}V &= \int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \pi \{-g(x)\}^2 dx + \int_{-\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \pi \{f(x)\}^2 dx - \int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \pi \{-f(x)\}^2 dx - \int_0^{\frac{1}{3}\pi} \pi \{g(x)\}^2 dx \\ &= \pi \left[\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \{f(x)\}^2 dx - \int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \{f(x)\}^2 dx + \int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{1}{6}\pi} \{g(x)\}^2 dx - \int_0^{\frac{1}{3}\pi} \{g(x)\}^2 dx \right] \\ &= \pi \left[2x - \sin \left\{ 2 \left(x + \frac{1}{3}\pi \right) \right\} \right]_{-\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} - \pi \left[2x - \sin \left\{ 2 \left(x + \frac{1}{3}\pi \right) \right\} \right]_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \\ &\quad + \pi \left[2x - \sin 2x \right]_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{1}{6}\pi} - \pi \left[2x - \sin 2x \right]_0^{\frac{1}{3}\pi} \\ &= 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} - \pi \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \left\{ 2\pi \cdot \frac{\pi}{3} - \pi \left(0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\} \\ &\quad + 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} - \pi \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \left\{ 2\pi \cdot \frac{\pi}{3} - \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \right) \right\} \\ &= \frac{2}{3}\pi^2 + 3\sqrt{3}\pi\end{aligned}$$

と計算できる。