

【解答】

(1)	1	2	3	4	5
	4	0	2	4	3
(2)	6	7	8	9	10
	3	5	4	3	2
(3)	11	12	13		
	2	2	1		

【解説】

(1)

さいころのそれぞれの目が出る確率は同様に確からしいとする。さいころを1回振ったとき、3以下の目が出る事象を A 、4または5の目が出る事象を B 、6の目が出る事象を C とする。

事象 A, B, C が起こる確率はそれぞれ $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ である。さいころを5回投げるとき、点

P の y 座標が3であるのは、5回のうち事象 B がちょうど3回起こる場合である。よって、その確率は

$${}_5C_3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{243}$$

である。

(2)

さいころを9回投げるとき、点 P がちょうど $(4, 3, 2)$ の位置に来るのは、9回のうち事象 A, B, C がそれぞれ4, 3, 2回ずつ起こる場合である。よって、その確率は

$$\frac{9!}{4!3!2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{35}{432}$$

である。

(3)

さいころを5回投げるとき、点 P がちょうど $(3, 2, 0)$ の位置に来るのは、5回のうち事象 A, B, C がそれぞれ3, 2, 0回ずつ起こる場合であるから、その確率は

$${}_5C_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{36}$$

である。また、点 P が $(3, 2, 0)$ の位置にいる状態からさいころを4回投げるとき、点 P がちょうど $(4, 3, 2)$ の位置に来るのは、4回のうち事象 A, B, C がそれぞれ1, 1, 2回ずつ起こる場合である。よって、その確率は

$$\frac{4!}{1!1!2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

である。以上より、さいころを9回投げるとき、点 P が $(3, 2, 0)$ を通って $(4, 3, 2)$ に来る確率は

$$\frac{5}{36} \cdot \frac{1}{18} = \frac{5}{648}$$

である。したがって、(2)の結果より、求める条件付き確率は

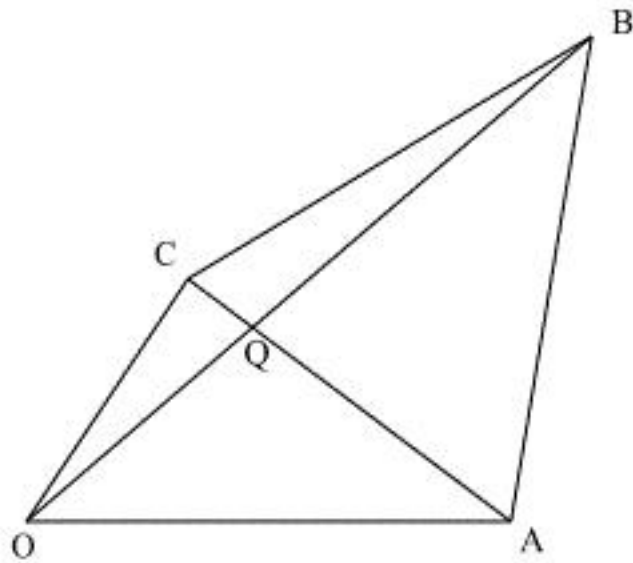
$$\frac{\frac{5}{648}}{\frac{35}{432}} = \frac{5}{648} \cdot \frac{432}{35} = \frac{2}{21}$$

である。

〔解答〕

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
1	2	2	1	5	4	5	3	2	1	4	3	8

〔解説〕



与式を変形すると、

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OC} &= \vec{0} \\
 \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OC} &= \vec{0} \\
 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OC} \\
 \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC}
 \end{aligned}$$

となる。ここで、点Qは直線OB上にあるので、実数 k を用いて

$$\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}k\overrightarrow{OA} + 2k\overrightarrow{OC}$$

と表せる。同時に点Qは直線AC上にあるので、上式の係数について

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}k + 2k &= 1 \\
 \Leftrightarrow \frac{5}{2}k &= 1 \\
 \Leftrightarrow k &= \frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{4}{5}\overrightarrow{OC} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、 $OQ = \frac{2}{5}OB$ であるので、

$$\frac{QB}{OQ} = \frac{OB - OQ}{OQ} = \frac{3}{2}$$

である。また、①より $AQ:QC=4:1$ であるので、 $\frac{QC}{AQ} = \frac{1}{4}$ である。以上の条件と、

$\angle OQA = \angle BQC$ であることから、

$$\begin{aligned}
 \triangle BCQ \div \triangle OAQ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot QB \cdot QC \cdot \sin \angle BQC}{\frac{1}{2} \cdot QO \cdot QA \cdot \sin \angle OQA} \\
 &= \frac{QB}{OQ} \cdot \frac{QC}{AQ} \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} \\
 &= \frac{3}{8}
 \end{aligned}$$

となる。

(1)

a_k から a_{k+1} への推移の仕方は2通りであるので、項数が n のとき、推移が全部で $n-1$ 回あることを考えると、T-数列は全部で

$$2^{n-1} \text{ (個)}$$

ある。

(答) 2^{n-1} 個

(2)

a_k から a_{k+1} への推移の仕方のうち、 $a_{k+1} = 3a_k$ となるものが x 回、 $a_{k+1} = \frac{1}{3}a_k$ となるものが y 回起きたとする。このとき a_n は

$$a_n = 3^{x-y}$$

と表せる。項数が12のとき、 $27 = 3^3$ であることから

$$\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=12-1 \end{cases}$$

$$\therefore x=7, y=4$$

となる。したがって、求めるT-数列の個数は、

$${}_{11}C_4 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 330 \text{ (個)}$$

である。

(答) 330 個

(3)

3^p が46桁以上となる最小の整数 p を求める。

$$3^p \geq 10^{46-1}$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} 3^p \geq \log_{10} 10^{45}$$

$$\Leftrightarrow p \log_{10} 3 \geq 45$$

$$\therefore p \geq 94.31 \cdots (\because \log_{10} 3 = 0.4771)$$

であるから、条件を満たす $p=95$ となる。したがって

$$x-y \geq 95 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす。一方、項数は101だから

$$x+y=100 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。①、②を x について解くと

$$x \geq 97.5$$

となるから、 x が98, 99, 100 となるとき、条件を満たす。したがって、求めるT-数列の個数は、

$${}_{100}C_{98} + {}_{100}C_{99} + {}_{100}C_{100} = {}_{100}C_2 + {}_{100}C_1 + {}_{100}C_0 = 5051 \text{ (個)}$$

である。

(答) 5051 個

(1)

2点 $P(s, s^2)$, $Q(t, t^2)$ が $t-s=1$, $s>0$ を満たしているとき

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow (t-s)^2 + (t^2-s^2)^2 &= (\sqrt{5})^2 \\ \Leftrightarrow 1^2 + (t+s)^2 &= 5 \quad (\because t-s=1) \\ \Leftrightarrow (t+s)^2 &= 4 \\ \therefore t+s &= 2 \quad (\because s>0, t>0) \end{aligned}$$

となる。よって、 s, t は

$$\begin{cases} t-s=1 \\ t+s=2 \end{cases} \Leftrightarrow (s, t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

と求まるから、点 P, Q の座標は

$$P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), Q\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

となる。

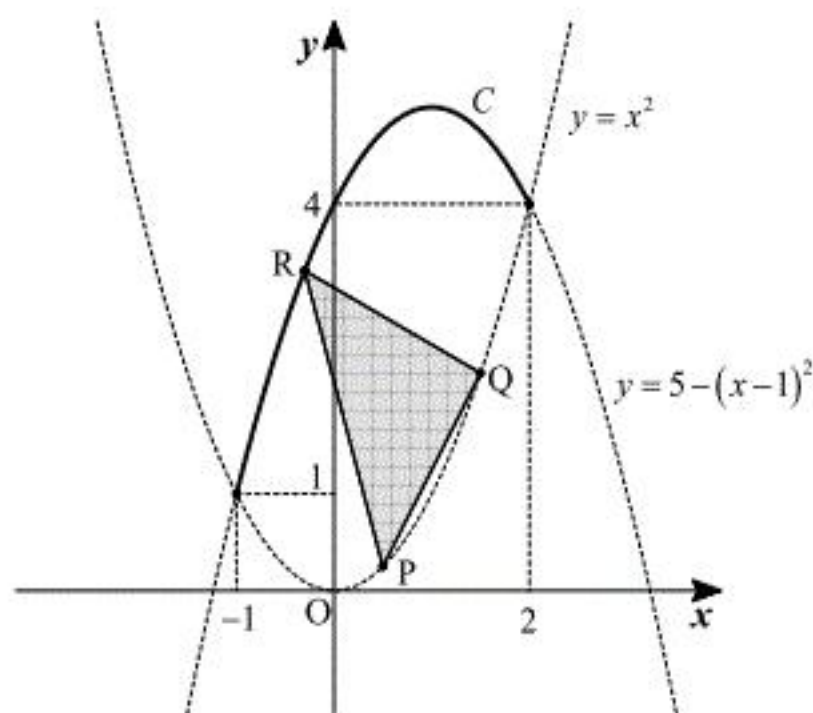
$$(\text{答}) \quad P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), Q\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

(2)

放物線 $y=x^2$ と放物線 $y=5-(x-1)^2$ の2式について、連立して y を消去すると

$$\begin{aligned} x^2 &= 5-(x-1)^2 \\ \Leftrightarrow 2x^2-2x-4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(x+1)(x-2) &= 0 \\ \therefore x &= -1, 2 \end{aligned}$$

となるから、2曲線の交点の座標は $(-1, 1), (2, 4)$ となる。よって、曲線 C および $\triangle PQR$ は以下の図のようになる。



ここで、実数 u を用いて、点 R の座標を $(u, 5-(u-1)^2)$ ($-1 \leq u \leq 2$) とおくと

$$\begin{cases} \overrightarrow{PR} = \left(u - \frac{1}{2}, -u^2 + 2u + \frac{15}{4}\right) \\ \overrightarrow{PQ} = (1, 2) \end{cases}$$

となるから、 $\triangle PQR$ の面積を $S(u)$ とおくと

$$\begin{aligned} S(u) &= \frac{1}{2} \left| 2 \cdot \left(u - \frac{1}{2}\right) - \left(-u^2 + 2u + \frac{15}{4}\right) \cdot 1 \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| u^2 - \frac{19}{4} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{19}{4} - u^2 \right) \quad (\because -1 \leq u \leq 2 \text{ より } 0 \leq u^2 \leq 4) \end{aligned}$$

と表せる。したがって、 $S(u)$ は $-1 \leq u \leq 2$ の範囲で $u=2$ のとき、最小値

$$S(2) = \frac{1}{2} \left(\frac{19}{4} - 2^2 \right) = \frac{3}{8}$$

をとることがわかる。このとき、点 R の座標は $(2, 4)$ である。

$$(\text{答}) \quad \triangle PQR \text{ の最小値: } \frac{3}{8}, \text{ 点 } R \text{ の座標: } (2, 4)$$

(3)

(2)における考察より、 $S(u)$ は $-1 \leq u \leq 2$ の範囲で $u=0$ のとき、最大値

$$S(0) = \frac{1}{2} \left(\frac{19}{4} - 0^2 \right) = \frac{19}{8}$$

をとることがわかる。このとき、点 R の座標は $(0, 4)$ である。

$$(\text{答}) \quad \triangle PQR \text{ の最大値: } \frac{19}{8}, \text{ 点 } R \text{ の座標: } (0, 4)$$

(1)

$f(x) = \int_0^x (t^2 - at + 1)e^t dt$ より $f'(x) = (x^2 - ax + 1)e^x$ である。関数 $f(x)$ が $x = \frac{1}{2}$ で極値をとると

き、 $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ であるから、

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}a + 1\right)e^{\frac{1}{2}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{5}{4} - \frac{1}{2}a &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right)e^x \\ &= \frac{1}{2}(x-2)(2x-1)e^x \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

と表されるから、 $f'(x)$ は $x = \frac{1}{2}$ の前後で正から負へ符号変化する。したがって $a = \frac{5}{2}$ のとき

$f(x)$ は確かに $x = \frac{1}{2}$ で極値をとる。よって、求める値は $a = \frac{5}{2}$ である。

(答) $a = \frac{5}{2}$

(2)

(1)より $a = \frac{5}{2}$ であるから、

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \left(t^2 - \frac{5}{2}t + 1\right) \cdot (e^t)' dt \\ &= \left[\left(t^2 - \frac{5}{2}t + 1\right)e^t\right]_0^x - \int_0^x \left(2t - \frac{5}{2}\right) \cdot (e^t)' dt \\ &= \left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right)e^x - 1 - \left[\left(2t - \frac{5}{2}\right)e^t\right]_0^x + \int_0^x 2e^t dt \\ &= \left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right)e^x - 1 - \left(2x - \frac{5}{2}\right)e^x - \frac{5}{2} + [2e^t]_0^x \\ &= \left(x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{7}{2}\right)e^x - \frac{7}{2} + 2e^x - 2 \\ &= \left(x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{11}{2}\right)e^x - \frac{11}{2} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $f(x) = \left(x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{11}{2}\right)e^x - \frac{11}{2}$

(3)

①より、関数 $f(x)$ の $0 \leq x \leq 3$ における増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{2}$	...	2	...	3
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(3)$

増減表より、求める最小値は $f(0)$ または $f(2)$ である。(2)の結果より、

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{11}{2} - \frac{11}{2} = 0 \\ f(2) &= \left(4 - 9 + \frac{11}{2}\right)e^2 - \frac{11}{2} = \frac{1}{2}e^2 - \frac{11}{2} \end{aligned}$$

であり、 $e < 3$ であるから、

$$f(2) < \frac{1}{2} \cdot 3^2 - \frac{11}{2} = -1 < 0 = f(0)$$

より $f(2) < f(0)$ となる。よって、求める最小値は $f(2) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{11}{2}$ である。

(答) $\frac{1}{2}e^2 - \frac{11}{2}$