

〔解答〕

(1)	1	2	3	4	
	3	1	5	3	
(2)	5	6	7	8	
	—	1	3	5	
(3)	9	10	11	12	13
	2	2	3	3	3

〔解説〕

(1)

与えられた方程式に対して、それぞれ底が2, 3である対数をとることで、

$$2^{a+b} = 4$$

$$\Leftrightarrow \log_2 2^{a+b} = \log_2 4$$

$$\therefore a+b=2$$

$$3^{3ab} = \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow \log_3 3^{3ab} = \log_3 \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow 3ab = -2$$

$$\therefore ab = -\frac{2}{3}$$

となる。したがって、解と係数の関係より、 a, b を2つの解として持つ2次方程式の1つは、

$$t^2 - 2t - \frac{2}{3} = 0$$

となる。これを解くと、

$$t^2 - 2t - \frac{2}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - 6t - 2 = 0$$

$$\therefore t = \frac{3 \pm \sqrt{15}}{3}$$

である。ここで、 $a \geq b$ であるから、 $a = \frac{3 + \sqrt{15}}{3}$ となる。

(2)

$x = \frac{\sqrt{5}-3}{2}$ のとき、

$$x = \frac{\sqrt{5}-3}{2} \Leftrightarrow 2x+3 = \sqrt{5}$$

となる。よって、両辺を2乗して、

$$(2x+3)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 9 = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0$$

となる。よって、 $x^2 + 3x = -1$ である。また、

$$\begin{aligned} 2x^4 + 5x^3 - 3x^2 - x + 7 &= (x^2 + 3x + 1)(2x^2 - x - 2) + 6x + 9 \\ &= 6 \cdot \frac{\sqrt{5}-3}{2} + 9 \\ &= 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

である。

(3)

複素数平面上の点 $3+i$ を中心として点 $7+3i$ を $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数は

$$\begin{aligned} 3+i + \{(7+3i) - (3+i)\} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) &= 3+i + (4+2i) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \\ &= 3+i + 2\sqrt{3} + 2i + \sqrt{3}i - 1 \\ &= 2 + 2\sqrt{3} + (3 + \sqrt{3})i \end{aligned}$$

である。

〔解答〕

(1)	$\boxed{14}$	$\boxed{15}$	$\boxed{16}$			
	9	0	0			
(2)	$\boxed{17}$	$\boxed{18}$	$\boxed{19}$	$\boxed{20}$	$\boxed{21}$	$\boxed{22}$
	2	0	1	1	2	2
(3)	$\boxed{23}$					
	3					

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}
 a_{18} &= 1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{17} \\
 &= (1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^8) + 4^9 \cdot (1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^8) \\
 &= (4^9 + 4^0) a_9
 \end{aligned}$$

となる。したがって、割った商は $4^9 + 4^0$ であり、余りは 0 である。

(2)

(1)と同様にして

$$\begin{aligned}
 a_{29} &= 1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{28} \\
 &= 1 + 4 + 4^2 \cdot (1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^8) + 4^{11} \cdot (1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^8) + 4^{20} \cdot (1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^8) \\
 &= (4^{20} + 4^{11} + 4^2) a_9 + 1 + 4
 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$a_9 = 1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^8 > 1 + 4$$

であるから、割った商は $4^{20} + 4^{11} + 4^2$ であり、余りは $a_2 = 1 + 4$ であるから、 $r = 2$ となる。

(3)

n を 9 で割ったときの余りで場合分けをして考える。 $l = 0, 1, 2, \dots$ かつ $b = 1, 2, \dots, 9$ として、 $n = 9l + b$ とおくと、 $l \geq 1$ のとき、

$$\begin{aligned}
 a_n &= a_{9l+b} \\
 &= 1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{9l+b-1} \\
 &= 1 + \cdots + 4^{b-1} + 4^b \cdot (1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^8) + 4^{9+b} \cdot (1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^8) \\
 &\quad + \cdots + 4^{9(l-1)+b} \cdot (1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^8) \\
 &= (4^{9(l-1)+b} + 4^{9(l-2)+b} + \cdots + 4^b) a_9 + 4^{b-1} + \cdots + 1 \\
 &= (4^{9(l-1)+b} + 4^{9(l-2)+b} + \cdots + 4^b) a_9 + a_b
 \end{aligned}$$

となる。また、 $l = 0$ の場合、 $a_n = a_b$ である。以上より、ユークリッドの互除法により、 a_n と a_9 の最大公約数は a_9 と a_b の最大公約数に等しい。すなわち、 a_n と a_9 が互いに素であることは a_9 と a_b が互いに素であることと同値である。

[1] $b = 9$ のとき

$a_9 \neq 1$ から、 a_9 と a_b は互いに素ではないので、 a_n と a_9 は互に素ではない。

[2] $b \neq 9$ のとき

等比数列の和の公式より、

$$a_9 = \frac{(4^9 - 1)}{4 - 1} = \frac{1}{3}(4^9 - 1), \quad a_b = \frac{(4^b - 1)}{4 - 1} = \frac{1}{3}(4^b - 1)$$

となる。また、

$$a_9 - a_b = \frac{1}{3}(4^9 - 4^b) = 4^b \cdot \frac{(4^{9-b} - 1)}{3} = 4^b \cdot a_{9-b}$$

であり、 $a_n = (4 \text{ の倍数}) + 1$ となっているので、 a_n は 4 の倍数ではない。したがって、ユークリッドの互除法より a_9 と a_b の最大公約数は、 a_b と $4^b \cdot a_{9-b}$ の最大公約数であり、 a_b と a_{9-b} の最大公約数である。すなわち、 a_9 と a_b が互いに素であることは a_b と a_{9-b} が互いに素であることと同値である。

[i] $b = 1$ のとき、

$a_1 = 1$ であるから、 a_b と a_{9-b} は互に素である。

[ii] $b = 2$ のとき

$$a_7 = (4^4 + 4^2 + 4^0) a_2 + 1$$

となり、ユークリッドの互除法から a_b と a_{9-b} は互に素である。

[iii] $b = 3$ のとき

$$a_6 = (4^3 + 4^0) a_3$$

となり、 a_{9-b} は $a_b (> 1)$ の倍数である。したがって a_b と a_{9-b} は互に素でない。

[iv] $b = 4$ のとき

$$a_5 = 4 \cdot a_4 + 1$$

となり、ユークリッドの互除法から a_b と a_{9-b} は互に素である。

[v] $b = 5$ のとき

$$a_5 = 4 \cdot a_4 + 1$$

となり、ユークリッドの互除法から a_b と a_{9-b} は互に素である。

[vi] $b = 6$ のとき

$$a_6 = (4^3 + 4^0) a_3$$

となり、 a_b は $a_{9-b} (> 1)$ の倍数である。したがって a_b と a_{9-b} は互に素でない。

[vii] $b = 7$ のとき

$$a_7 = (4^4 + 4^2 + 4^0) a_2 + 1$$

となり、ユークリッドの互除法から a_b と a_{9-b} は互に素である。

[viii] $b = 8$ のとき

$a_1 = 1$ であるから、 a_b と a_{9-b} は互に素である。

以上より $b = 3, 6$ のときは a_b と a_{9-b} は互に素ではない。

[1], [2]より、 $n = 9l + b$ ($l = 0, 1, 2, \dots$ かつ $b = 3, 6, 9$) のとき a_n と a_9 は互に素でない。したがって自然数 a_n と自然数 a_9 が互に素でないための必要十分条件は $n = 3k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) である。

(1)

点Pを (x, y) とおくと,

$$\overrightarrow{AP} = (x-2, y), \overrightarrow{BP} = (x-2, y-2)$$

となる。したがって,

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y(y-2) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 2$$

であり,

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{OB} \geq 2$$

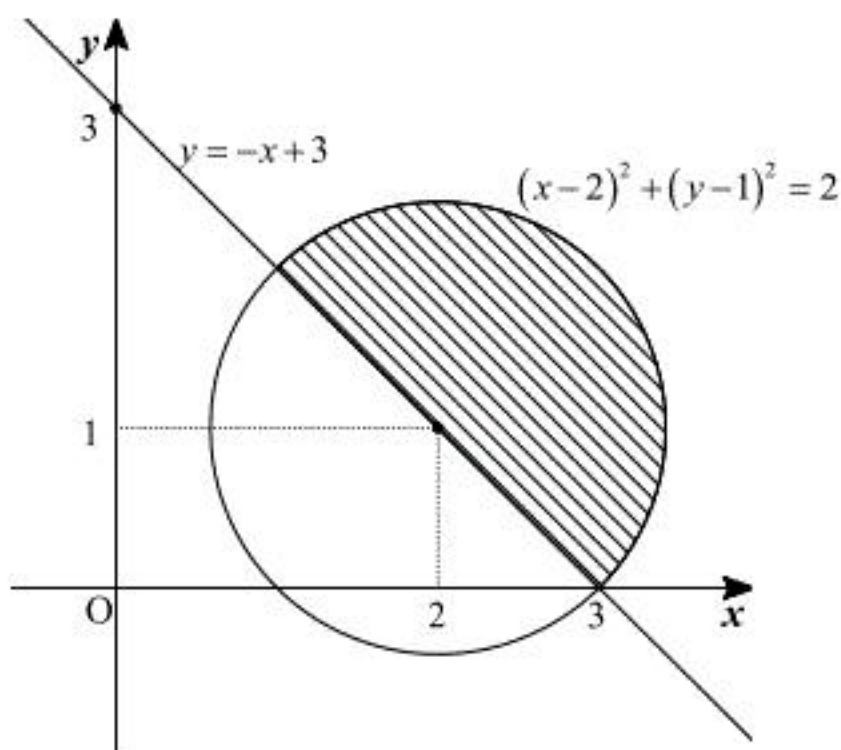
$$\Leftrightarrow 2(x-2) + 2y \geq 2$$

$$\Leftrightarrow y \geq -x+3$$

となる。したがって、点Pの動く範囲は

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 2 \\ y \geq -x+3 \end{cases}$$

を満たす領域となる。これらを図示すると下図の斜線部分のようになる。ただし境界線を含む。



(答) $(x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 2$ かつ $y \geq -x+3$, 前図

(2)

原点Oから直線 $y = -x+3$ に下ろした垂線の足は、直線 $y = x$ と直線 $y = -x+3$ の交点であるため、その x 座標は

$$x = -x+3$$

$$\therefore x = \frac{3}{2}$$

であり、 y 座標は

$$y = \frac{3}{2}$$

となる。これは

$$\left(\frac{3}{2}-2\right)^2 + \left(\frac{3}{2}-1\right)^2 = \frac{1}{2} \leq 2$$

を満たすため、原点Oから直線 $y = -x+3$ に下ろした垂線の足は(1)で求めた範囲内に存在する。したがって、(1)より線分OPの最小値は原点Oと直線 $y = -x+3$ の距離であり、最大値は原点Oと、原点Oと点(2, 1)を結ぶ直線と円弧の交点の距離である。したがって最小値は、

$$\frac{|0+0-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

であり、最大値は

$$\sqrt{2^2+1^2} + \sqrt{2} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

となる。

(答) 最小値 $\frac{3}{2}\sqrt{2}$, 最大値 $\sqrt{5} + \sqrt{2}$

(1)

$g(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ とおく。 $g(x)$ を x で微分して整理すると

$$g'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + (-x)xe^{-\frac{x^2}{2}} = (1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

となる。したがって、 $y = g(x)$ の $\left(t, te^{-\frac{t^2}{2}}\right)$ における接線 ℓ の方程式は、

$$y = (1-t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}(x-t) + te^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\Leftrightarrow y = (1-t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}x + t^3e^{-\frac{t^2}{2}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = (1-t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}x + t^3e^{-\frac{t^2}{2}}$$

(2)

(1)で導いた接線 ℓ の方程式に $x=0$ を代入することで $f(t) = t^3e^{-\frac{t^2}{2}}$ となる。よって、 $f(t)$ を t で微分して整理することで

$$f'(t) = 3t^2e^{-\frac{t^2}{2}} + (-t)t^3e^{-\frac{t^2}{2}} = 3t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1 - \frac{1}{3}t^2\right)$$

となる。したがって、関数 $f(t)$ の増減表は以下のようになる。

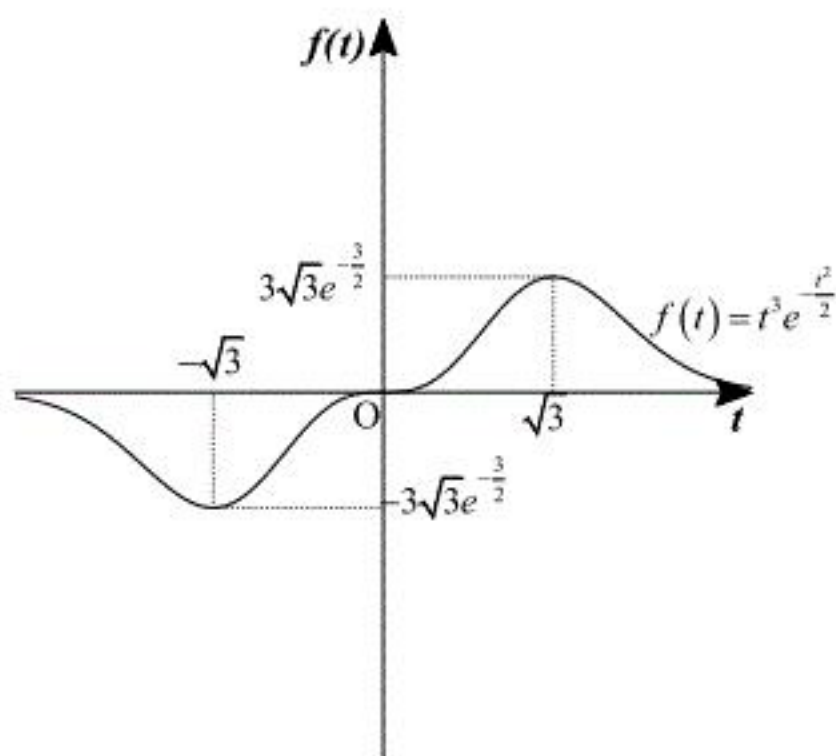
t	...	$-\sqrt{3}$	...	0	...	$\sqrt{3}$	...
$f'(t)$	-	0	+	0	+	0	-
$f(t)$	$\searrow$	$-3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}$	$\searrow$

また、 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^{-x^2} = 0$ より、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 3t^2e^{-\frac{t^2}{2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(9t^4e^{-t^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} 3t^2e^{-\frac{t^2}{2}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(9t^4e^{-t^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

である。よって、グラフの概形は下図のようになる。



(答) 前図

(3)

(2)より $f(t)$ は曲線 C の接線 ℓ の y 切片である。したがって、 y 軸上の点 $(0, a)$ から曲線 C に

引くことができる接線の本数は、方程式 $f(t) = a \Leftrightarrow t^3e^{-\frac{t^2}{2}} = a$ の解の個数に等しい。すなわち、

曲線 $y = t^3e^{-\frac{t^2}{2}}$ と直線 $y = a$ との交点の個数に等しい。したがって、(2)の図より

$$\begin{cases} -3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}} > a, a > 3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}} \text{ のとき } 0 \text{ 本} \\ a = -3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}, 0, 3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}} \text{ のとき } 1 \text{ 本} \\ -3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}} < a < 0, 0 < a < 3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}} \text{ のとき } 2 \text{ 本} \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} -3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}} > a, a > 3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}} \text{ のとき } 0 \text{ 本} \\ a = -3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}, 0, 3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}} \text{ のとき } 1 \text{ 本} \\ -3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}} < a < 0, 0 < a < 3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}} \text{ のとき } 2 \text{ 本} \end{cases}$$

(1)

倍角の公式, 半角の公式より

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

であるから,

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C_1$$

$$\int \sin^2 2x dx = \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{8} \sin 4x + C_2$$

$$\int \sin x \sin 2x dx = \int 2 \sin^2 x \cos x dx = \int 2 \sin^2 x (\sin x)' dx = \frac{2}{3} \sin^3 x + C_3$$

となる。ただし C_1, C_2, C_3 は積分定数である。

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C_1$$

$$(\text{答}) \int \sin^2 2x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{8} \sin 4x + C_2$$

$$\int \sin x \sin 2x dx = \frac{2}{3} \sin^3 x + C_3$$

(2)

(1)より,

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (a \sin x + b \sin 2x)^2 dx \\ &= a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx + 2ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x + b^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x dx \\ &= a^2 \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2ab \left[\frac{2}{3} \sin^3 x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + b^2 \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{8} \sin 4x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{a^2 + b^2}{2} \pi + \frac{8}{3} ab \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{a^2 + b^2}{2} \pi + \frac{8}{3} ab$$

(3)

$a^2 + b^2 = 1$ より, $I(a, b) = \frac{1}{2} \pi + \frac{8}{3} ab$ となる。ここで, $a^2 + b^2 = 1$ より, $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす実数 θ を用いて $a = \cos \theta, b = \sin \theta$ とおける。このとき

$$ab = \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

であるから,

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi \text{ のとき } ab \text{ は最大値 } \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \text{ のとき } ab \text{ は最小値 } -\frac{1}{2}$$

をとる。よって,

$$(a, b) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ (複合同順) のとき, 最大値 } I(a, b) = \frac{1}{2} \pi + \frac{4}{3}$$

$$(a, b) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ (複合同順) のとき, 最小値 } I(a, b) = \frac{1}{2} \pi - \frac{4}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (a, b) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ (複合同順) のとき, 最大値 } I(a, b) = \frac{1}{2} \pi + \frac{4}{3}$$

$$(a, b) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ (複合同順) のとき, 最小値 } I(a, b) = \frac{1}{2} \pi - \frac{4}{3}$$