

[解答]

(1)	1	2
	1	6
(2)	3	4
	0	6
(3)	5	6
	2	4

[解説]

(1)

すべての玉の取り出し方は同様に確からしい。A が黒玉、B が白玉をとればよいので、1 回目に B が勝つ確率は、

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 0.16$$

より、16% となる。

(2)

1 回目は引き分けで、2 回目に A が黒玉、B が白玉をとればよい。よって 2 回目に B が勝つ確率は、

$$\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4}\right) = \frac{6}{100} = 0.06$$

より、6% となる。

(3)

3 回目以降の試行について考える。左から白玉、黒玉とし、A の持つ玉の個数を $A(3, 2)$ のように表す。これを用いて、 $n(n = 1, 2, 3, 4, 5)$ 回目の試行を行う前に A, B が持つ玉の状況を以下の表に示す。

1回目	A(3, 2), B(2, 3)			
2回目	A(2, 2), B(1, 3)		A(3, 1), B(2, 2)	
3回目	A(1, 2), B(0, 3)	A(2, 1), B(1, 2)		A(3, 0), B(2, 1)
4回目	Bは勝てない	A(1, 1), B(0, 2)	A(2, 0), B(1, 1)	Bは勝てない
5回目	Bは勝てない			

上表より、4 回目以降の試行では、B は勝てないことがわかる。また、3 回目で B が勝つ確率は、

$$\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{50}$$

である。これを(1), (2)の結果とあわせて、B が勝つ確率は、

$$\frac{16}{100} + \frac{6}{100} + \frac{2}{100} = \frac{24}{100} = 0.24$$

より、24% となる。

[解答]

7	8	9	10
3	4	1	2

[解説]

与えられた t の関数は

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \int_0^2 (tx-1)^2 dx \\
 &= \int_0^2 (t^2x^2 - 2tx + 1) dx \\
 &= \left[\frac{t^2}{3}x^3 - tx^2 + x \right]_0^2 \\
 &= \frac{8}{3}t^2 - 4t + 2 \\
 &= \frac{8}{3} \left(t^2 - \frac{3}{2}t \right) + 2 \\
 &= \frac{8}{3} \left(t - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^2 + 2 \\
 &= \frac{8}{3} \left(t - \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

と変形でき、 $f(t)$ は $t = \frac{3}{4}$ で最小値 $\frac{1}{2}$ をとる。

(1)

円 $x^2 + y^2 = 25$ の点 $A(3, 4)$ における接線は、円の接線の公式より

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 25 \\ \therefore y &= -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$$

(2)

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + c$ とすると、 $y = f(x)$ のグラフは点 $A(3, 4)$ と、点 $B\left(1, \frac{23}{6}\right)$ を通るから

$$4 = 9 + 9a + 3b + c \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{23}{6} = \frac{1}{3} + a + b + c \quad \dots \textcircled{2}$$

の2つの関係式が成立する。また、 $f'(x) = x^2 + 2ax + b$ となることから点 A における $y = f(x)$ の接線は、

$$\begin{aligned} y - 4 &= (9 + 6a + b)(x - 3) \\ \therefore y &= (9 + 6a + b)x - 23 - 18a - 3b \end{aligned}$$

と表せ、これが直線 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$ と一致するから係数を比較して、

$$9 + 6a + b = -\frac{3}{4} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$-23 - 18a - 3b = \frac{25}{4} \quad \dots \textcircled{4}$$

が成立する。④を整理すると③を得るので、以下③についてのみ考える。①から②を辺々引いて

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} &= \frac{26}{3} + 8a + 2b \\ \therefore b &= -\frac{17}{4} - 4a \end{aligned}$$

となり、これを③に代入して

$$\begin{aligned} 9 + 6a - \frac{17}{4} - 4a &= -\frac{3}{4} \\ \therefore a &= -\frac{11}{4} \end{aligned}$$

を得る。さらに③より

$$\begin{aligned} 9 - \frac{66}{4} + b &= -\frac{3}{4} \\ \therefore b &= \frac{27}{4} \end{aligned}$$

となり、②より

$$\begin{aligned} \frac{23}{6} &= \frac{1}{3} - \frac{11}{4} + \frac{27}{4} + c \\ \therefore c &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad a = -\frac{11}{4}, b = \frac{27}{4}, c = -\frac{1}{2}$$

(1)

$\triangle OAB$ は一辺の長さが 1 の正三角形であるから、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とするとき

$$|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。したがって、 $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$ について、内積 $\vec{a} \cdot \vec{c}$ および $\vec{b} \cdot \vec{c}$ の値は、 $\textcircled{1}$ より

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (3\vec{a} - \vec{b}) = 3|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 1^2 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot (3\vec{a} - \vec{b}) = 3\vec{b} \cdot \vec{a} - |\vec{b}|^2 = 3 \cdot \frac{1}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{5}{2}, \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}$$

(2)

$\vec{u} = \vec{a} + t\vec{b}$ について、 $\textcircled{1}$ より

$$|\vec{u}|^2 = |\vec{a} + t\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{b}|^2 = 1^2 + 2t \cdot \frac{1}{2} + t^2 \cdot 1^2 = t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

となるから、 $|\vec{u}|^2$ は $t = -\frac{1}{2}$ のとき、最小値 $\frac{3}{4}$ をとる。ここで、 $|\vec{u}| > 0$ であるから、 $|\vec{u}|$ は $t = -\frac{1}{2}$

のとき、最小値 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ をとることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \text{最小値} : \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (t = -\frac{1}{2} \text{ のとき})$$

(3)

$\vec{u}, \vec{v}$ について

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{a} + t\vec{b} \\ \vec{v} = x^2\vec{a} + x\vec{b} + \vec{c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = \vec{a} + t\vec{b} \\ \vec{v} = (x^2 + 3)\vec{a} + (x - 1)\vec{b} \quad (\because \vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}) \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。ここで、 $\vec{a}$ の係数について $1, x^2 + 3 \neq 0$ であり、 $\vec{a}, \vec{b}$ は互いに平行でなく $\vec{0}$ でない 2 つ

のベクトルであるから、 $|\vec{u}| \neq 0$ かつ $|\vec{v}| \neq 0$ が成り立つことがわかる。したがって、

$$\vec{u} \text{ と } \vec{v} \text{ が直交する} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

となる。ここで、 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (\vec{a} + t\vec{b}) \cdot \{(x^2 + 3)\vec{a} + (x - 1)\vec{b}\} \\ &= (x^2 + 3)|\vec{a}|^2 + \{(x - 1) + t(x^2 + 3)\}\vec{a} \cdot \vec{b} + t(x - 1)|\vec{b}|^2 \\ &= (x^2 + 3) \cdot 1^2 + \{(x - 1) + t(x^2 + 3)\} \cdot \frac{1}{2} + t(x - 1) \cdot 1^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}t + 1\right)x^2 + \left(t + \frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{2}t + \frac{5}{2}\right) \end{aligned}$$

となるから、題意を満たすベクトル $\vec{v}$ が存在するような条件は、 x に関する方程式

$$\left(\frac{1}{2}t + 1\right)x^2 + \left(t + \frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{2}t + \frac{5}{2}\right) = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

が実数解を持つような条件と一致することがわかる。以下、 t の値で場合分けをして考える。

[1] $t = -2$ のとき

方程式 $\textcircled{3}$ は

$$-\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

と解くことができるから、これは題意の条件を満たす。

[2] $t \neq -2$ のとき

$\frac{1}{2}t + 1 \neq 0$ であるから、方程式 $\textcircled{3}$ は 2 次方程式である。この 2 次方程式の判別式を D とお

くと、求める条件は

$$\begin{aligned} D \geq 0 &\Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}t + 1\right)\left(\frac{1}{2}t + \frac{5}{2}\right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(t^2 + t + \frac{1}{4}\right) - (t^2 + 7t + 10) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -6t - \frac{39}{4} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow t \leq -\frac{13}{8} \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より、求める実数 t の値の範囲は

$$t = -2 \quad \text{または} \quad (t \neq -2 \quad \text{かつ} \quad t \leq -\frac{13}{8}) \Leftrightarrow t \leq -\frac{13}{8}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad t \leq -\frac{13}{8}$$