

〔解答〕

(1)	1	2	3	4	5	6
	4	4	6	1	0	4
(2)	7	8	9	10		
	1	4	3	4		
(3)	11	12	13	14	15	16
	9	4	3	4	2	7

〔解説〕

(1)

与式を変形すると、

$$\begin{aligned} xy+3x-3y-58 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-3)(y+3) &= 49 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。 x, y が正の整数であるとき、 $y+3$ が 4 以上の整数であることに注目すると、 $\textcircled{1}$ を満たす (x, y) の組は

$$\begin{aligned} (x-3, y+3) &= (1, 49), (7, 7) \\ \therefore (x, y) &= (4, 46), (10, 4) \end{aligned}$$

の 2 組である。

(2)

問題文で与えられた式

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= \sqrt{2} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta &= \sqrt{2} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

の両辺をそれぞれ 2 乗すると

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta &= 2 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{4} \\ \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta &= 2 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{5} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\textcircled{4} + \textcircled{5}$ より

$$\begin{aligned} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 2(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) &= 4 \\ \Leftrightarrow -2 \cos(\alpha + \beta) &= 2 \\ \Leftrightarrow \cos(\alpha + \beta) &= -1 \end{aligned}$$

であり、 $0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi$ より、 $0 \leq \alpha + \beta \leq 2\pi$ であるから

$$\alpha + \beta = \pi \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{6}$$

となる。さらに、 $\textcircled{3}, \textcircled{6}$ より

$$\cos \alpha - \cos(\pi - \alpha) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

となるから、 $\textcircled{6}, \textcircled{7}$ より

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi \right) \quad (\because 0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi)$$

と求まる。逆に、 $\alpha = \frac{1}{4}\pi, \beta = \frac{3}{4}\pi$ であるとき、 $\textcircled{2}, \textcircled{3}$ を満たす。

(3)

数列 $\{a_n\}$ の公比を r とおくと、

$$\begin{aligned} a_5 &= a_2 \cdot r^3 \\ \Leftrightarrow \frac{256}{9} &= 12 \cdot r^3 \\ \Leftrightarrow r^3 &= \frac{64}{27} \end{aligned}$$

となる。ここで数列 $\{a_n\}$ は実数からなるため公比も実数であり、 $r = \frac{4}{3}$ である。このとき、

$$a_1 \cdot \frac{4}{3} = a_2 \Leftrightarrow a_1 = 9$$

であり、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、 $a_n = 9 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ である。 $a_n > 0$ より、 a_n について底を 2 とする対数をとると、

$$\log_2 a_n = \log_2 9 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = 2 \log_2 3 + \left(\log_2 \frac{4}{3}\right)(n-1)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^7 \log_2 a_n &= \sum_{n=1}^7 2 \log_2 3 + \left(\log_2 \frac{4}{3}\right) \cdot \sum_{n=1}^7 (n-1) \\ &= 7 \cdot 2 \log_2 3 + \left(\log_2 \frac{4}{3}\right) \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot (7+1) - 7 \right\} \\ &= 14 \log_2 3 + 21(2 - \log_2 3) \\ &= 42 - 7 \log_2 3 \end{aligned}$$

となる。

(1)

この袋から5個の玉を同時に取り出すとき、その取り出し方は全部で ${}_{30}C_5$ 通り存在し、これらは同様に確からしい。このうち、赤玉を1個も取り出さないような取り出し方は ${}_{28}C_5$ 通り存在するから、その確率は、

$$\frac{{}_{28}C_5}{{}_{30}C_5} = \frac{20}{29}$$

である。よって、取り出した5個の中に赤玉が少なくとも1個含まれる確率は

$$1 - \frac{20}{29} = \frac{9}{29}$$

である。

(答) $\frac{9}{29}$

(2)

この袋から k 個の玉を同時に取り出すとき、その取り出し方は全部で ${}_{30}C_k$ 通り存在し、これらは同様に確からしい。このうち、赤玉を1個も取り出さないような取り出し方は ${}_{28}C_k$ 通り存在するから、その確率は $\frac{{}_{28}C_k}{{}_{30}C_k}$ である。よって、赤玉が少なくとも1個含まれる確率が $\frac{1}{2}$ より

大きくなるとき、

$$\begin{aligned} 1 - \frac{{}_{28}C_k}{{}_{30}C_k} &> \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{{}_{28}C_k}{{}_{30}C_k} &< \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{28!}{k!(28-k)!} \cdot \frac{k!(30-k)!}{30!} &< \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{(30-k) \cdot (29-k)}{30 \cdot 29} &< \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow k^2 - 59k + 435 &< 0 \end{aligned}$$

となるから、 $0 < k \leq 30$ において、これを満たす最小の k の値を求めればよい。ここで、

$f(k) = k^2 - 59k + 435$ とおくと、 $0 < k < \frac{59}{2}$ において $f(k)$ は単調減少であり、

$$f(8) = 8^2 - 59 \cdot 8 + 435 = 27 > 0$$

$$f(9) = 9^2 - 59 \cdot 9 + 435 = -15 < 0$$

であるから、求める k の値は $k=9$ である。

(答) $k=9$

(1)

 x^2+5x+4 について、

$$\begin{aligned}
 x^2+5x+4 &> 0 \\
 \Leftrightarrow (x+1)(x+4) &> 0 \\
 \Leftrightarrow x < -4, -1 < x
 \end{aligned}$$

であることから、

$$\begin{cases} x^2+5x+4 > 0 & (x < -4, -1 < x) \\ x^2+5x+4 \leq 0 & (-4 \leq x \leq -1) \end{cases}$$

である。また、 $\frac{1}{2}x^2+x-4$ について、

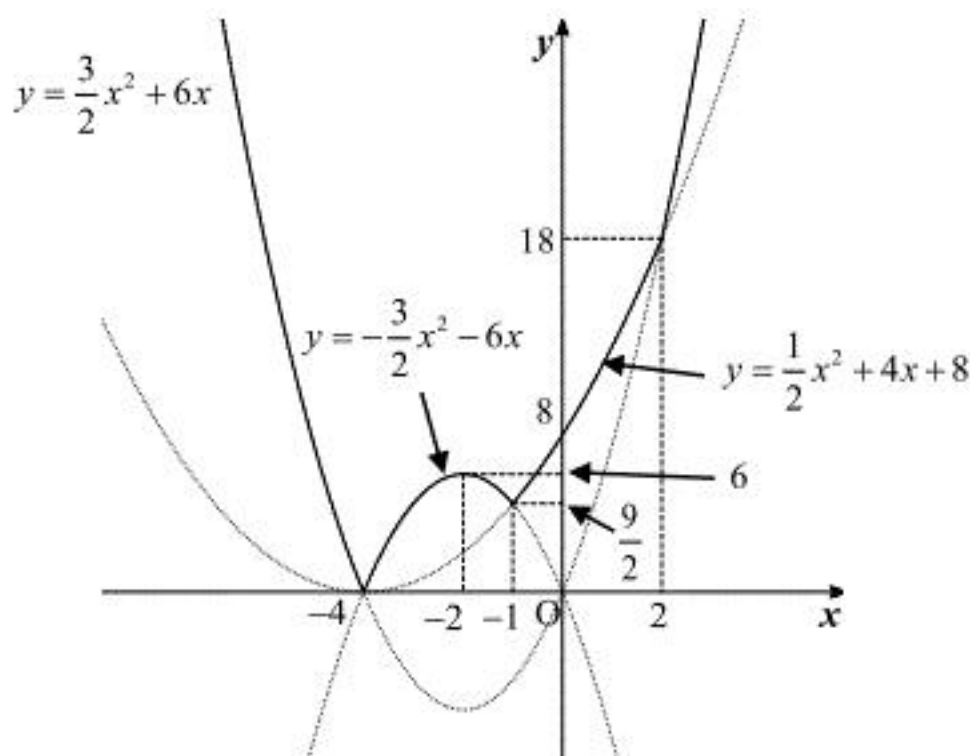
$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}x^2+x-4 &> 0 \\
 \Leftrightarrow x^2+2x-8 &> 0 \\
 \Leftrightarrow (x+4)(x-2) &> 0
 \end{aligned}$$

であることから、

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+x-4 > 0 & (x < -4, 2 < x) \\ \frac{1}{2}x^2+x-4 \leq 0 & (-4 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

である。したがって、

$$f(x) = \begin{cases} (x^2+5x+4) + \left(\frac{1}{2}x^2+x-4\right) = \frac{3}{2}x^2+6x & (x < -4 \text{ のとき}) \\ -(x^2+5x+4) - \left(\frac{1}{2}x^2+x-4\right) = -\frac{3}{2}x^2-6x & (-4 \leq x < -1 \text{ のとき}) \\ (x^2+5x+4) - \left(\frac{1}{2}x^2+x-4\right) = \frac{1}{2}x^2+4x+8 & (-1 \leq x < 2 \text{ のとき}) \\ (x^2+5x+4) + \left(\frac{1}{2}x^2+x-4\right) = \frac{3}{2}x^2+6x & (2 \leq x \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるから、 $y=f(x)$ のグラフを図示すると下図を得る。

(答) 前図

(2)

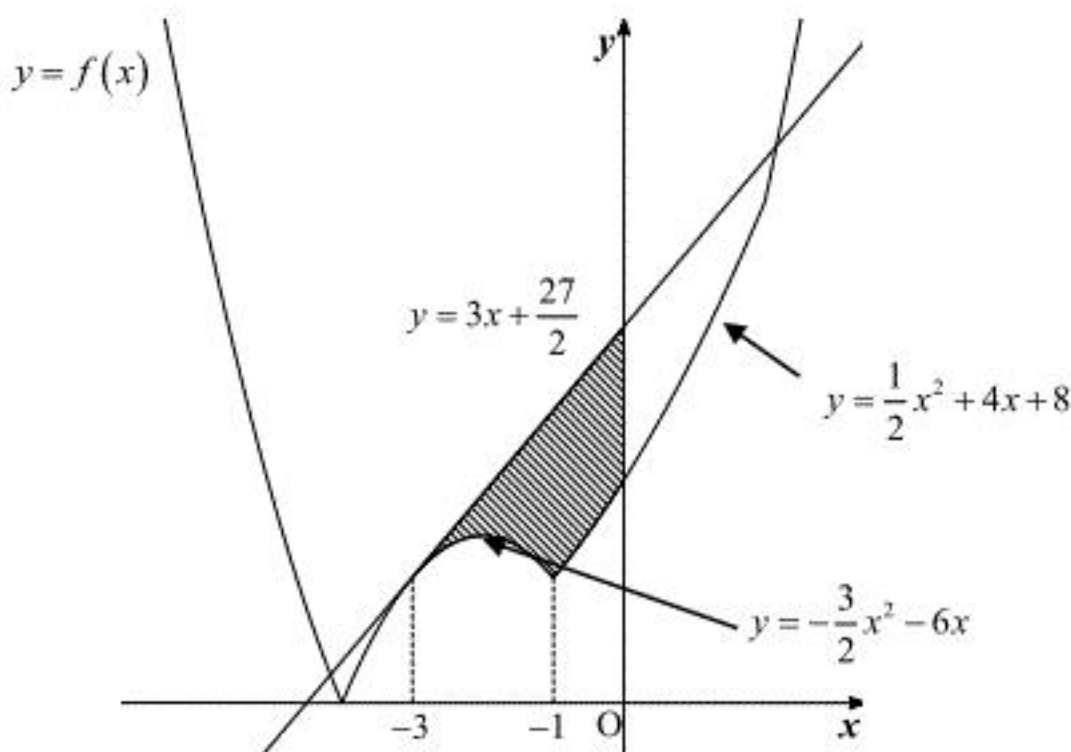
 $-4 \leq x < -1$ のとき、 $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 6x$ である。このとき $f'(x) = -3x - 6$ であるから、点 $(-3, f(-3))$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned}
 y - f(-3) &= 3(x+3) \\
 \Leftrightarrow y &= 3x + \frac{27}{2}
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $y = 3x + \frac{27}{2}$

(3)

直線 $y = 3x + \frac{27}{2}$ と曲線 $y = f(x)$ を図示すると下図を得る。

求める面積は、図の斜線部分の面積であり、

$$\begin{aligned}
 &\int_{-3}^{-1} \left\{ 3x + \frac{27}{2} - \left(-\frac{3}{2}x^2 - 6x \right) \right\} dx + \int_{-1}^0 \left\{ 3x + \frac{27}{2} - \left(\frac{1}{2}x^2 + 4x + 8 \right) \right\} dx \\
 &= \int_{-3}^{-1} \frac{3}{2}(x+3)^2 dx + \int_{-1}^0 \left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{11}{2} \right) dx \\
 &= \left[\frac{1}{2}(x+3)^3 \right]_{-3}^{-1} + \left[-\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}x \right]_{-1}^0 \\
 &= \frac{1}{2}(-1+3)^3 - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{11}{2} \right) \\
 &= \frac{59}{6}
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{59}{6}$