

I

【解答】

(1)	1	2	3	4						
	3	7	1	8						
(2)	5	6								
	3	3								
(3)	7	8	9	10	11	12	13	14		
	1	0	1	0	4	1	1	2		
(4)	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	1	7	2	4	1	0	2	1	4	
	24	25	26	27	28					
	—	1	2	1	4					

【解説】

(1)

$$x=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ のとき,}$$
$$\begin{aligned}x+\frac{1}{x}&=\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{2}{3+\sqrt{5}}\\&=\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{2(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}\\&=\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\\&=3\end{aligned}$$

である。これより、

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=9-2=7$$

であり、

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=27-9=18$$

である。

(2)

左辺を変形すると、

$$\begin{aligned}\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}&=\cos\theta\cdot\frac{2}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}\\&=\frac{2\cos\theta}{1-\sin^2\theta}\\&=\frac{2\cos\theta}{\cos^2\theta}\\&=\frac{2}{\cos\theta}\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\frac{2}{\cos\theta}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

である。

(3)

実数 a, b, c を用いて、 $P(x)=-x^4+5x^3+ax^2+bx+c$ とおく。ここで、

$$\begin{aligned}P(-1)&=-30\\\Leftrightarrow-1-5+a-b+c&=-30\\\Leftrightarrow a-b+c&=-24\end{aligned}\qquad\qquad\qquad\cdot\cdot\cdot\textcircled{1}$$

が得られる。 $P(x)=0$ の解の1つが $x=\theta_1=1+i$ であるとき、

$$\begin{aligned}P(1+i)&=0\\\Leftrightarrow-(1+i)^4+5(1+i)^3+a(1+i)^2+b(1+i)+c&=0\\\Leftrightarrow(4-i)(1+i)^3+2ai+b(1+i)+c&=0\\\Leftrightarrow(b+c-6)+(2a+b+10)i&=0\end{aligned}$$

が得られるから、複素数の相等より、

$$\begin{cases}b+c-6=0&\qquad\qquad\qquad\cdot\cdot\cdot\textcircled{2}\\2a+b+10=0&\qquad\qquad\qquad\cdot\cdot\cdot\textcircled{3}\end{cases}$$

が成り立つ。①、②、③より、

$$a=-10, b=10, c=-4$$

が得られるから、 $P(x)=-x^4+5x^3-10x^2+10x-4$ となる。また、 $P(x)$ は係数がすべて実数であるから、 $x=\theta_1=1+i$ を解に持つならば $x=\theta_2=1-i$ も解に持つ。因数定理より、 $P(x)$ は

$$\{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}=(x^2-2x+2)$$

を因数に持つから、残りの解は、

$$\begin{aligned}P(x)&=0\\\Leftrightarrow(x^2-2x+2)(-x^2+3x-2)&=0\\\Leftrightarrow-(x^2-2x+2)(x-1)(x-2)&=0\\\therefore\theta_3=1, \theta_4=2\ (\because\theta_3<\theta_4)\end{aligned}$$

と求められる。

(4)

実数 α, β, γ を用いて、 $f(x)=x^4-2x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ とおく。 $f(x)$ を x で微分すると、

$$f'(x)=4x^3-6x^2+2\alpha x+\beta$$

であり、 $f(x)$ は $x=-1$ または $x=-\frac{3}{2}$ で極値をとるから、

$$\begin{aligned}\begin{cases}f'(-1)=0\\f'\left(-\frac{3}{2}\right)=0\end{cases}\end{aligned}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2\alpha+\beta-10=0&\qquad\qquad\qquad\cdot\cdot\cdot\textcircled{4}\\-3\alpha+\beta-27=0&\qquad\qquad\qquad\cdot\cdot\cdot\textcircled{5}\end{cases}$$

が得られる。④、⑤より、 $\alpha=-17, \beta=-24$ となる。このとき、

$$f(x)=x^4-2x^3-17x^2-24x+\gamma$$

について、

$$\begin{aligned}f'(x)&=4x^3-6x^2-34x-24\\&=2(2x+3)(x+1)(x-4)\end{aligned}$$

となるから、増減表は以下のようになる。

x	...	$-\frac{3}{2}$	...	-1	...	4	...
$f'(x)$	－	0	+	0	－	0	+
$f(x)$		↘ 極小		↗ 極大		↘ 極小	

上表より、

$$\begin{aligned}f(4)&=256-128-272-96+\gamma=\gamma-240\\f\left(-\frac{3}{2}\right)&=\left(-\frac{3}{2}\right)^4-2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^3-17\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2-24\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+\gamma=\frac{153}{16}+\gamma\end{aligned}$$

であり、 $\gamma-240<\gamma+\frac{153}{16}$ であるから、最小値は $f(4)=\gamma-240$ である。よって、

$$f(4)=-250\Leftrightarrow\gamma=-10$$

となる。また、

$$\begin{aligned}f(x)&=x^4-2x^3-17x^2-24x-10\\&=(x+1)^2(x^2-4x-10)\end{aligned}$$

と因数分解できるから、方程式 $f(x)=0$ の解は、

$$\omega_1=2-\sqrt{14}, \omega_2=-1, \omega_3=2+\sqrt{14}$$

である。

Ⅱ

【解答】

(1)	1.	29	30					
		3	8					
	2.	31						
4								
(2)	1.	32	33	34				
		3	3	6				
	2.	35	36	37	38			
		5	3	7	2			
(3)		39	40	41	42	43		
		3	2	2	4	3		
(4)		44	45	46	47	48	49	50
		9	3	1	1	0	5	2

【解説】

(1)1.

【解説】

(1)1.

常用対数をとると、

$$\begin{aligned}\log_{10}18^{30} &= 30\log_{10}18 \\ &= 30\log_{10}2\cdot3^2 \\ &= 30(\log_{10}2+2\log_{10}3) \\ &= 30\cdot(0.301+2\cdot0.4771) \\ &= 37.656\end{aligned}$$

が得られる。これより、

$$\begin{aligned}37 &< 37.656 < 38 \\ \Leftrightarrow \log_{10}10^{37} &< \log_{10}18^{30} < \log_{10}10^{38} \\ \Leftrightarrow 10^{37} &< 18^{30} < 10^{38}\end{aligned}$$

となるから、 18^{30} は 38 桁の整数である。

2.

いま、

$$\begin{aligned}\log_{10}4 &= 2\log_{10}2 = 0.602, \\ \log_{10}5 &= \log_{10}\frac{10}{2} = 1-\log_{10}2 = 0.699\end{aligned}$$

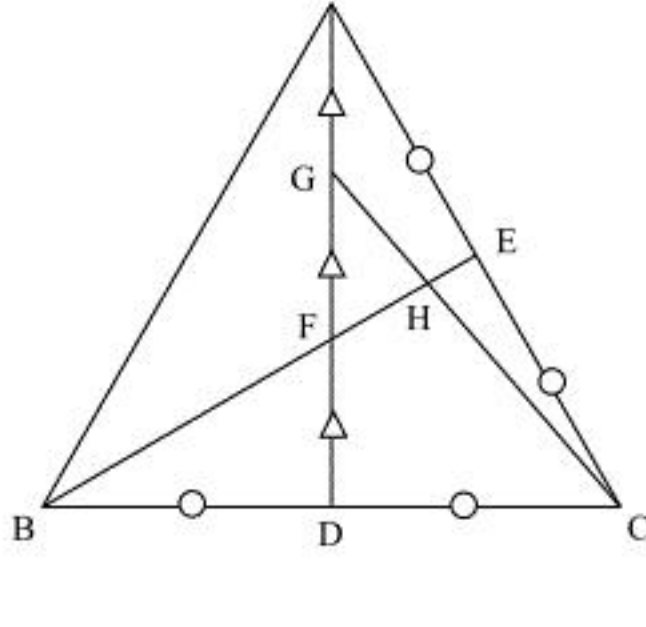
であるから、

$$\begin{aligned}37.602 &< 37.656 < 37.699 \\ \Leftrightarrow 37+\log_{10}4 &< \log_{10}18^{30} < 37+\log_{10}5 \\ \Leftrightarrow 10^{37+\log_{10}4} &< 18^{30} < 10^{37+\log_{10}5} \\ \Leftrightarrow 4\cdot10^{37} &< 18^{30} < 5\cdot10^{37}\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、 18^{30} の最高位の数字は 4 である。

(2)1.

点 F は正三角形 ABC の重心であるから、 $AG:GF:FD=1:1:1$ である。以下に、正三角形 ABC および点 D, E, F, G, H を図示する。



△AGC について、メネラウスの定理より、

$$\begin{aligned}\frac{AC}{CE}\cdot\frac{EH}{HF}\cdot\frac{FG}{GA} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{1}\cdot\frac{EH}{HF}\cdot\frac{1}{1} &= 1 \\ \therefore EH:HF &= 1:2\end{aligned}$$

が成り立つ。さらに、点 F は正三角形 ABC の重心であるから、 $BF:FE=2:1$ である。以上より、 $BH:HE=8:1$ であることがわかる。ここで、△ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\triangle AGC &= \frac{1}{3}\triangle ADC = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{24} \\ \triangle CEH &= \frac{1}{9}\triangle BCE = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}\triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{72}\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、

$$(\text{四角形 AGHE}) = \triangle AGC - \triangle CEH = \frac{\sqrt{3}}{24} - \frac{\sqrt{3}}{72} = \frac{\sqrt{3}}{36}$$

である。

2.

1.より、

$$\begin{aligned}\triangle CEH &= \frac{\sqrt{3}}{72} \\ \triangle BDF &= \frac{1}{3}\triangle ABD = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{24} \\ \triangle BCE &= \frac{1}{2}\triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$

が成り立つから、

$$(\text{四角形 FDCH}) = \triangle BCE - \triangle CEH - \triangle BDF = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{72} - \frac{\sqrt{3}}{24} = \frac{5\sqrt{3}}{72}$$

である。

(3)

数列 $\{a_n\}$ の初項を $a(>0)$ 、公比を $r(>0)$ とすると、

$$\begin{aligned}a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 &= 4 \\ \Leftrightarrow a+ar+ar^2+ar^3+ar^4 &= 4 \\ \Leftrightarrow a(1+r+r^2+r^3+r^4) &= 4\end{aligned}\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{3}$$

と、

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5} &= 9 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{ar}+\frac{1}{ar^2}+\frac{1}{ar^3}+\frac{1}{ar^4} &= 9 \\ \Leftrightarrow \frac{1+r+r^2+r^3+r^4}{ar^4} &= 9\end{aligned}\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{4}$$

が成り立つ。 $\textcircled{3}\div\textcircled{4}$ より

$$\frac{a(1+r+r^2+r^3+r^4)}{\frac{1+r+r^2+r^3+r^4}{ar^4}}=\frac{4}{9}$$

$$\Leftrightarrow a^2r^4=\frac{4}{9}$$

$$\therefore ar^2=\frac{2}{3}\left(\because a>0,r>0\right)$$

となる。したがって

$$a_1a_2a_3a_4a_5=a\cdot ar\cdot ar^2\cdot ar^3\cdot ar^4=a^5r^{10}=\left(ar^2\right)^5=\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$$

である。

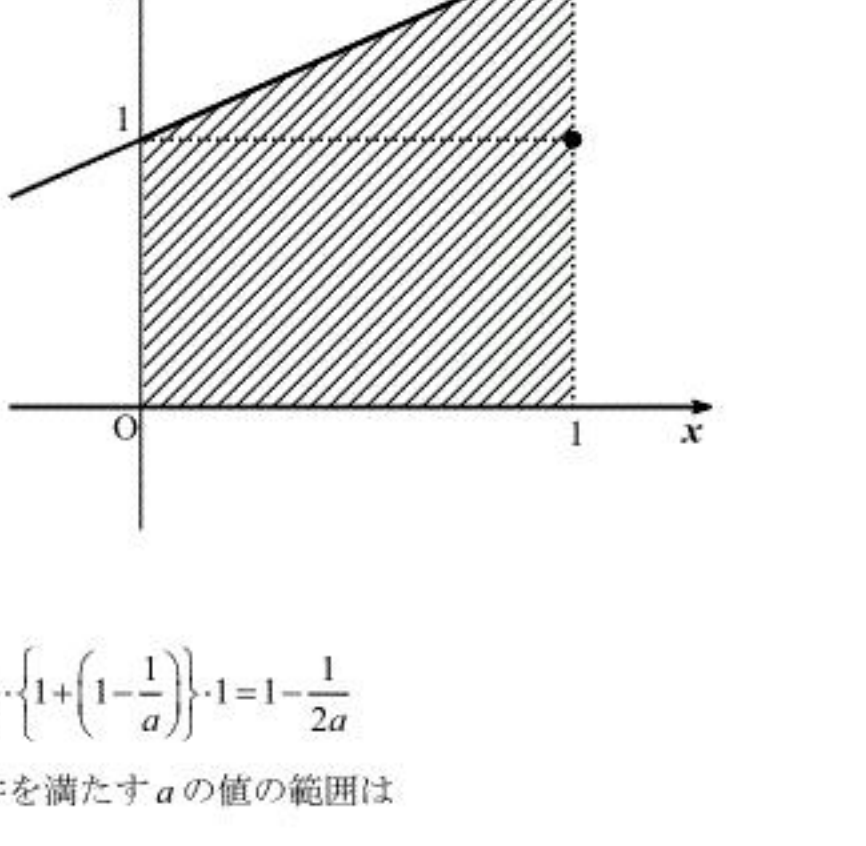
(4)

a の値の範囲によって、場合分けを行う。

[1] $a<0$ のとき

このとき、 $0\leq x\leq 1$ の範囲で $\left|\frac{x}{a}-1\right|=-\frac{x}{a}+1$ であるから、 $\int_0^1\left|\frac{x}{a}-1\right|dx$ で表される面積は以下

の斜線部ようになる。



上図より、

$$\int_0^1\left|\frac{x}{a}-1\right|dx=\frac{1}{2}\cdot\left\{1+\left(1-\frac{1}{a}\right)\right\}\cdot1=1-\frac{1}{2a}$$

であるから、条件を満たす a の値の範囲は

$$\begin{aligned}\int_0^1\left|\frac{x}{a}-1\right|dx &\leq \frac{4}{5} \\ \Leftrightarrow 1-\frac{1}{2a} &\leq \frac{4}{5} \\ \Leftrightarrow a &\geq \frac{5}{2}\end{aligned}$$

となるが、これは $a<0$ に反するから不適である。

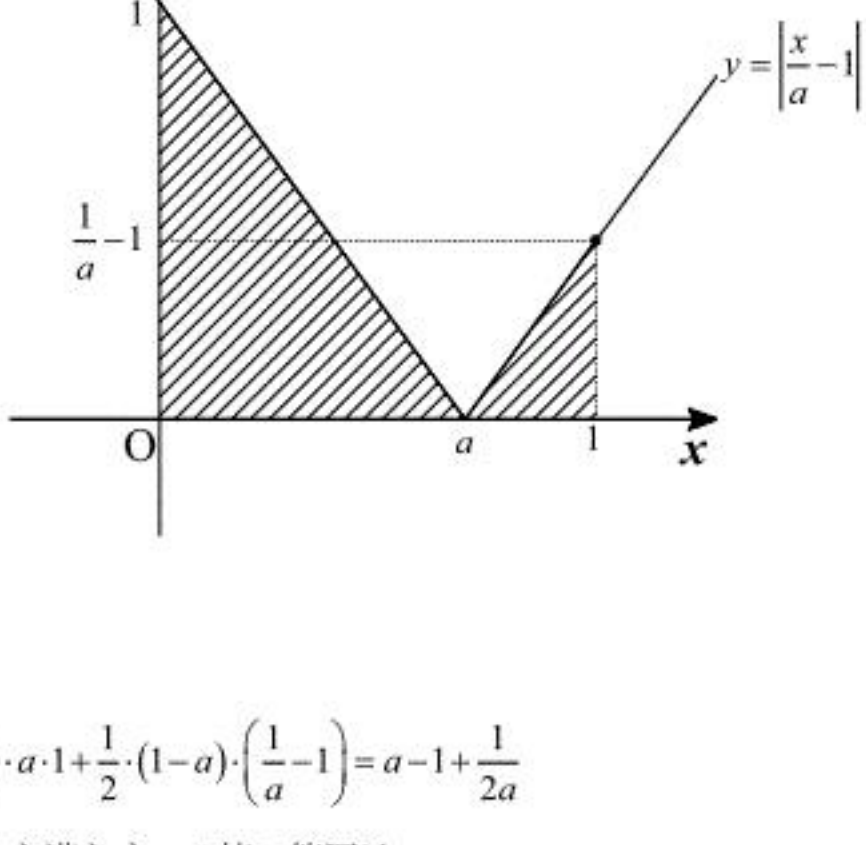
[2] $0\leq a<1$ のとき

この場合、

$$0\leq x<a\text{ のとき、}\left|\frac{x}{a}-1\right|=-\frac{x}{a}+1$$

$$a\leq x\leq 1\text{ のとき、}\left|\frac{x}{a}-1\right|=\frac{x}{a}-1$$

であるから、 $\int_0^1\left|\frac{x}{a}-1\right|dx$ で表される面積は以下の斜線部ようになる。



上図より、

$$\int_0^1\left|\frac{x}{a}-1\right|dx=\frac{1}{2}\cdot a\cdot1+\frac{1}{2}\cdot(1-a)\cdot\left(\frac{1}{a}-1\right)=a-1+\frac{1}{2a}$$

であるから、条件を満たす a の値の範囲は

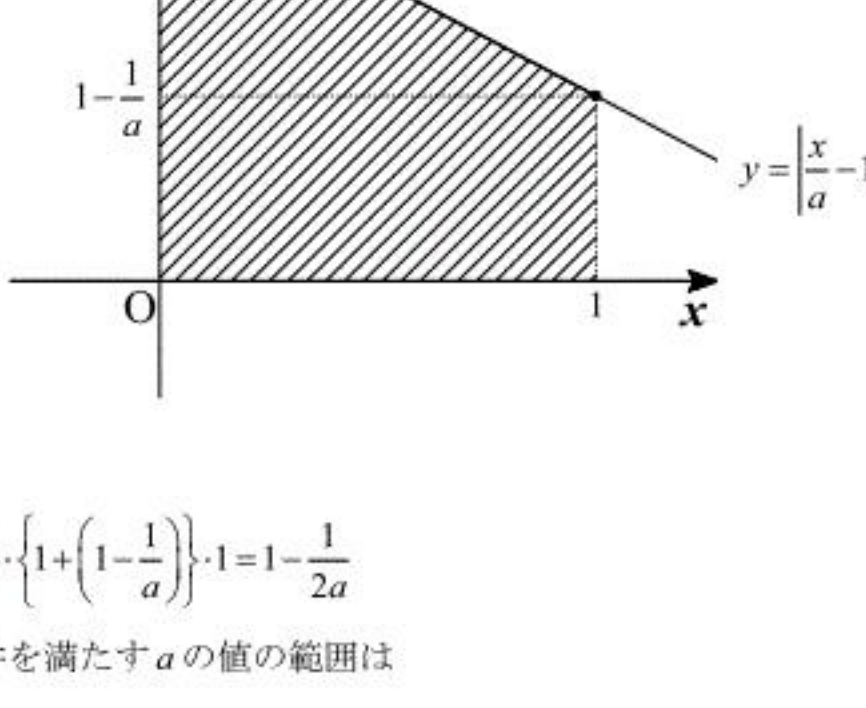
$$\begin{aligned}\int_0^1\left|\frac{x}{a}-1\right|dx &\leq \frac{4}{5} \\ \Leftrightarrow a-1+\frac{1}{2a} &\leq \frac{4}{5} \\ \Leftrightarrow 10a^2-18a+5 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{9-\sqrt{31}}{10} &\leq a\leq \frac{9+\sqrt{31}}{10}\end{aligned}$$

となる。これと $0\leq a<1$ を合わせると、 $\frac{9-\sqrt{31}}{10}\leq a<1$ である。

[3] $1\leq a$ のとき

このとき、 $0\leq x\leq 1$ の範囲で $\left|\frac{x}{a}-1\right|=-\frac{x}{a}+1$ であるから、 $\int_0^1\left|\frac{x}{a}-1\right|dx$ で表される面積は以下

の斜線部ようになる。



上図より、

$$\int_0^1\left|\frac{x}{a}-1\right|dx=\frac{1}{2}\cdot\left\{1+\left(1-\frac{1}{a}\right)\right\}\cdot1=1-\frac{1}{2a}$$

であるから、条件を満たす a の値の範囲は

$$\begin{aligned}\int_0^1\left|\frac{x}{a}-1\right|dx &\leq \frac{4}{5} \\ \Leftrightarrow 1-\frac{1}{2a} &\leq \frac{4}{5} \\ \Leftrightarrow a &\leq \frac{5}{2}\end{aligned}$$

となる。これと $1\leq a$ を合わせると、 $1\leq a\leq \frac{5}{2}$ である。

以上[1],[2],[3]より、 $\int_0^1\left|\frac{x}{a}-1\right|dx\leq\frac{4}{5}$ を満たす a の範囲は $\frac{9-\sqrt{31}}{10}\leq a\leq\frac{5}{2}$ である。

III

〔解答〕

(1)	1.	51	52				
		7	8				
	2.	53	54				
		1	2				
(2)	1.	55	56	57			
		5	1	8			
	2.	58	59				
		1	4				
(3)		60	61	62	63	64	65
	2	9	0	3	1	0	
(4)	1.	66	67				
		6	4				
	2.	68	69				
		8	6				

〔解説〕

- (1)1.
 さいころはどの目が出る事象も同様に確からしく起こる。xyz が偶数となるとき、x, y, z の少なくとも1つが偶数である。x, y, z の少なくとも1つが偶数である事象は、x, y, z がすべて奇数である事象の余事象であるから、求める確率は

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{8}$$

である。

- (1)2.
 $x+y+z$ が偶数となるのは、
 x, y, z のいずれか1つが偶数であり残り2つが奇数である事象
 x, y, z のすべてが偶数である事象
 のいずれかである。2つの事象は排反であるから、求める確率は

$${}_3C_1\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

である。

- (2)1.
 A君がケーキをもらえるのは
 最初の「B君→C君」で2連勝する事象
 最初のB君に負けて、後の「C君→B君」で2連勝する事象
 のいずれかである。よって、求める確率は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1+\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{3+2}{18}=\frac{5}{18}$$

である。

- (2)2.
 A君がケーキをもらえるのは
 最初の「C君→B君」で2連勝する事象
 最初のC君に負けて、後の「B君→C君」で2連勝する事象
 のいずれかである。よって、求める確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1+\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2+1}{12}=\frac{1}{4}$$

である。

- (3)
 ある工場で生産された製品の重さは正規分布に従うとする。無作為に選んだ製品の重さの平均を標準化すると

$$\frac{30-m}{\sqrt{\frac{5^2}{100}}}=2(30-m)$$

となる。この値が標準正規分布の95%の範囲にあるとき、標準正規分布の上側2.5%点は1.96であるから

$$\begin{aligned} -1.96\leq 2(30-m)\leq 1.96 \\ \Leftrightarrow -0.98\leq 30-m\leq 0.98 \\ \Leftrightarrow 29.02\leq m\leq 30.98 \end{aligned}$$

である。小数第2位を四捨五入して

$$29.0\leq m\leq 31.0$$

となる。

- (4)1.
 二項定理より
 ${}_{16}C_0+{}_{16}C_1+{}_{16}C_2+{}_{16}C_3+\cdots+{}_{16}C_{16}=(1+1)^{16}=2^{16}$

である。よって、

$$\frac{{}_{16}C_0+{}_{16}C_1+{}_{16}C_2+{}_{16}C_3+\cdots+{}_{16}C_{16}}{1024}=\frac{2^{16}}{2^{10}}=2^6=64$$

である。

- (4)2.
 いま、

$$r_{{}_nC_r}=r\frac{n!}{r!(n-r)!}=n\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}=n_{{}_{n-1}C_{r-1}}$$

が成り立つから、二項定理より、

$$\begin{aligned} &2\cdot {}_{43}C_1+4\cdot {}_{43}C_2+6\cdot {}_{43}C_3+8\cdot {}_{43}C_4+\cdots+86\cdot {}_{43}C_{43} \\ &=2\left({}_{43}C_1+2\cdot {}_{43}C_2+3\cdot {}_{43}C_3+4\cdot {}_{43}C_4+\cdots+43\cdot {}_{43}C_{43}\right) \\ &=2\left(43\cdot {}_{42}C_0+43\cdot {}_{42}C_1+43\cdot {}_{42}C_2+43\cdot {}_{42}C_3+\cdots+43\cdot {}_{42}C_{42}\right) \\ &=2\cdot 43\cdot (1+1)^{42} \\ &=43\cdot 2^{43} \end{aligned}$$

である。また、二項定理より

$$\begin{aligned} (1+1)^{43}&={}_{43}C_0+{}_{43}C_1+{}_{43}C_2+{}_{43}C_3+\cdots+{}_{43}C_{43} \\ (1-1)^{43}&={}_{43}C_0-{}_{43}C_1+{}_{43}C_2-{}_{43}C_3+\cdots-{}_{43}C_{43} \end{aligned}$$

であるから、上2式を辺々引くと、

$$\begin{aligned} (1+1)^{43}-(1-1)^{43}&=2\left({}_{43}C_1+{}_{43}C_3+{}_{43}C_5+{}_{43}C_7+\cdots+{}_{43}C_{43}\right) \\ \Leftrightarrow {}_{43}C_1+{}_{43}C_3+{}_{43}C_5+{}_{43}C_7+\cdots+{}_{43}C_{43}&=2^{42} \end{aligned}$$

が成り立つ。以上より、

$$\frac{2\cdot {}_{43}C_1+4\cdot {}_{43}C_2+6\cdot {}_{43}C_3+8\cdot {}_{43}C_4+\cdots+86\cdot {}_{43}C_{43}}{{}_{43}C_1+{}_{43}C_3+{}_{43}C_5+{}_{43}C_7+\cdots+{}_{43}C_{43}}=\frac{43\cdot 2^{43}}{2^{42}}=86$$

である。

IV

(1)

$\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2}{n} = s^2 + \bar{x}^2$ が成り立つことを示す。 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$, $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$ である

ことに注意すると、それぞれ

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2$$

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 + \bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k^2 - 2\bar{x}x_k + \bar{x}^2) + \bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2\bar{x} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) + \frac{1}{n} \cdot n\bar{x}^2 + \bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 + \bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 \end{aligned}$$

と変形できる。したがって、題意は成り立つことが示された。

(証明終)

(2)

$\frac{q}{n} < \frac{\bar{x}}{a}$ が成り立つことを示す。 n 個の正の実数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ を大きいものから順に並べたものを $y_1, y_2, \dots, y_n$ とする。以下、 q ($0 \leq q \leq n$) の値で場合分けをして考える。

[1] $0 < q < n$ のとき

n 個の正の実数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ のうち、正の実数 a より大きいものが全部で q 個であるから

$$\begin{cases} k \text{ が } q \text{ 以下の自然数であるとき} & y_k > a \\ k \text{ が } q \text{ より大きい自然数であるとき} & y_k > 0 \end{cases}$$

である。したがって、

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^q y_k + \frac{1}{n} \sum_{k=q+1}^n y_k > \frac{1}{n} \sum_{k=1}^q a + \frac{1}{n} \cdot n \cdot 0 = \frac{q}{n} a \quad \dots \textcircled{1}$$

となるから、 $\textcircled{1}$ より

$$\bar{x} > \frac{q}{n} a \Leftrightarrow \frac{q}{n} < \frac{\bar{x}}{a} \quad (\because a > 0)$$

が成り立つ。

[2] $q = 0$ のとき

$\frac{q}{n} = 0$ であり、 $\bar{x} \left(= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) > 0$, $a > 0$ であるから、 $\frac{\bar{x}}{a} > 0$ である。よって、

$$\frac{q}{n} (= 0) < \frac{\bar{x}}{a}$$

が成り立つ。

[3] $q = n$ のとき

$\frac{q}{n} = 1$ であり、 n 以下のすべての自然数 k に対して $x_k > a$ であるから、 $\bar{x} > a$ である。よって、

$$\frac{q}{n} (= 1) < \frac{\bar{x}}{a}$$

が成り立つ。

以上[1], [2], [3]より、題意は成り立つことが示された。

(証明終)

(3)

$\frac{q}{n} < \frac{s^2 + \bar{x}^2}{a^2}$ が成り立つことを示す。(1)の結果より、 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 = s^2 + \bar{x}^2$ であるから

$$\frac{q}{n} < \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 \Leftrightarrow qa^2 < \sum_{k=1}^n x_k^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

と変形できるため、 $\textcircled{2}$ を示せばよい。(2)と同様に $y_1, y_2, \dots, y_n$ を定め、 q ($0 \leq q \leq n$) の値で場合分けをして考える。

[1] $0 < q < n$ のとき

(2)[1]と同様に考えて

$$\begin{cases} k \text{ が } q \text{ 以下の自然数であるとき} & y_k^2 > a^2 \\ k \text{ が } q \text{ より大きい自然数であるとき} & y_k^2 > 0 \end{cases}$$

であるから、

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 = \sum_{k=1}^n y_k^2 = \sum_{k=1}^q y_k^2 + \sum_{k=q+1}^n y_k^2 > \sum_{k=1}^q a^2 + n \cdot 0 = qa^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。したがって、 $\textcircled{3}$ より $\textcircled{2}$ は成り立つ。

[2] $q = 0$ のとき

$qa^2 = 0$ であり、 n 以下のすべての自然数 k に対して $x_k^2 > 0$ より、 $\sum_{k=1}^n x_k^2 > 0$ である。よって、

$$qa^2 (= 0) < \sum_{k=1}^n x_k^2$$

より、 $\textcircled{2}$ は成り立つ。

[3] $q = n$ のとき

$qa^2 = na^2$ であり、 n 以下のすべての自然数 k に対して $x_k^2 > a^2$ より、 $\sum_{k=1}^n x_k^2 > na^2$ である。よって、

$$qa^2 (= na^2) < \sum_{k=1}^n x_k^2$$

より、 $\textcircled{2}$ は成り立つ。

以上[1], [2], [3]より、題意は成り立つことが示された。

(証明終)