

【解答】

(1)	1	2	3	4	5
	9	1	2	1	6
(2)	6	7	8	9	10
	6	1	2	1	6
(3)	11	12	13		
	1	1	2		

【解説】

(1)

出た目の最大が6であるということは、3回サイコロを振って少なくとも1回6の目が出るということである。つまり余事象である5以下の目だけが出る確率を考えると、求める確率は

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216}$$

となる。

(2)

出た目の最大が5となるのは、6の目が1回も出ないで5の目が出るときである。つまり求める確率は、6の目が1回も出ない確率から5, 6の目が出ない確率を引いたものとなる。これは、5以下の目だけが出る確率から、4以下の目だけが出る確率を引いた確率に等しい。よって、

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3 - \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{61}{216}$$

となる。

(3)

3回のサイコロを振ったときの出方は $6^3 = 216$ 通りであり、これらは同様に確からしい。出た目の最大が5であり、最小が2となるのは、出た目の最大が5、最小が2、2番目に大きい目が2以上5以下となるときである。つまり出た目の組み合わせは、

$$(2, 2, 5), (2, 3, 5), (2, 4, 5), (2, 5, 5)$$

の4通りとなる。 $(2, 2, 5), (2, 5, 5)$ のときはそれぞれ ${}_3C_1 = 3$ 通り、 $(2, 3, 5), (2, 4, 5)$ のときはそれぞれ $3! = 6$ 通りの出方が存在するため、求める確率は、

$$\frac{2 \cdot 3 + 2 \cdot 6}{6^3} = \frac{1}{12}$$

となる。

II

〔解答〕

14	15	16	17
b	$-$	1	6

〔解説〕

x に関する2次方程式

$$\sqrt{2}x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}x + 2^k = 0$$

の判別式を D とすると、この2次方程式が実数解をもつ条件は $D \geq 0$ となるときである。つまり

$$D \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} \right\}^2 - 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^k \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2^{-2k+2} - 2^{k+\frac{5}{2}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2^{-2k+2} \geq 2^{k+\frac{5}{2}}$$

$$\Leftrightarrow -2k+2 \geq k+\frac{5}{2} \quad (\because 2 > 1)$$

$$\therefore k \leq -\frac{1}{6}$$

が得られ、このとき2次方程式は実数解をもつ。

III

〔解答〕

(1)	18	19	20	21
	4	0	－	3
(2)	22	23	24	25
	1	4	2	8

〔解説〕

(1)

等差数列 $\{a_n\}$ の公差を d とすると

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

となる。つまり

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a_1 + a_2 = 77 \\ a_5 + a_6 + a_7 = 75 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a_1 + a_1 + d = 77 \\ a_1 + 4d + a_1 + 5d + a_1 + 6d = 75 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2a_1 + d = 77 \\ 3a_1 + 15d = 75 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\therefore (a_1, d) = (40, -3)$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= na_n + \frac{1}{2}d(n-1)n \\ &= 40n - \frac{3}{2}(n-1)n \\ &= -\frac{1}{2}n(3n-83) \end{aligned}$$

となる。 $|S_n|$ が最小となるのは S_n と0の差が最も小さくなるときであるため、 $S_n = 0$ となる周

辺の自然数 n において $|S_n|$ が最も小さくなるきを調べれば良い。 $f(x) = -\frac{1}{2}x(3x-83)$ とお

くと、 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \frac{83}{3}$ であるから、 $|S_n| = |f(n)|$ を最小にする可能性のある n は

$n = 1, 27, 28$ である。

[1] $n = 1$ のとき

$$S_1 = a_1 = 40$$

となる。

[2] $n = 27$ のとき

$$S_{27} = -\frac{1}{2} \cdot 27 \cdot (3 \cdot 27 - 83) = 27$$

となる。

[3] $n = 28$ のとき

$$S_{28} = -\frac{1}{2} \cdot 28 \cdot (3 \cdot 28 - 83) = -14$$

となる。

以上、[1], [2], [3]より、 $n = 28$ のとき $|S_{28}| = 14$ となり、このとき $|S_n|$ は最小となる。

IV

〔解答〕

(1)	26	27	28	29	30	31
	－	1	4	－	1	4
(2)	32	33	34	35	36	37
	－	3	2	1	5	8

〔解説〕

(1)

3 次関数 $y = x^3 - x$ について、この関数の導関数は、

$$y' = 3x^2 - 1$$

となる。つまり点 $(t, t^3 - t)$ における 3 次関数のグラフの接点の傾きは $3t^2 - 1$ となる。よってこ

のときの接線の方程式は

$$y = (3t^2 - 1)(x - t) + t^3 - t$$

$$\therefore y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$$

となる。よって $t = \frac{1}{2}$ のとき、接線の方程式は

$$y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

となり、傾きと y 切片はともに $-\frac{1}{4}$ となる。

(2)

$y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$ が点 $\left(\frac{3}{2}, a\right)$ を通るとき

$$a = \{3t^2 - 1\} \cdot \frac{3}{2} - 2t^3$$

$$\therefore a = -2t^3 + \frac{9}{2}t^2 - \frac{3}{2}$$

を満たす。3 次関数においては、接点と接線は 1 対 1 対応するので、上の式が t に関して相異な

る 3 つの解を持てばよい。よって、 $g(t) = -2t^3 + \frac{9}{2}t^2 - \frac{3}{2}$ とすると、題意を満たすのは $y = g(t)$

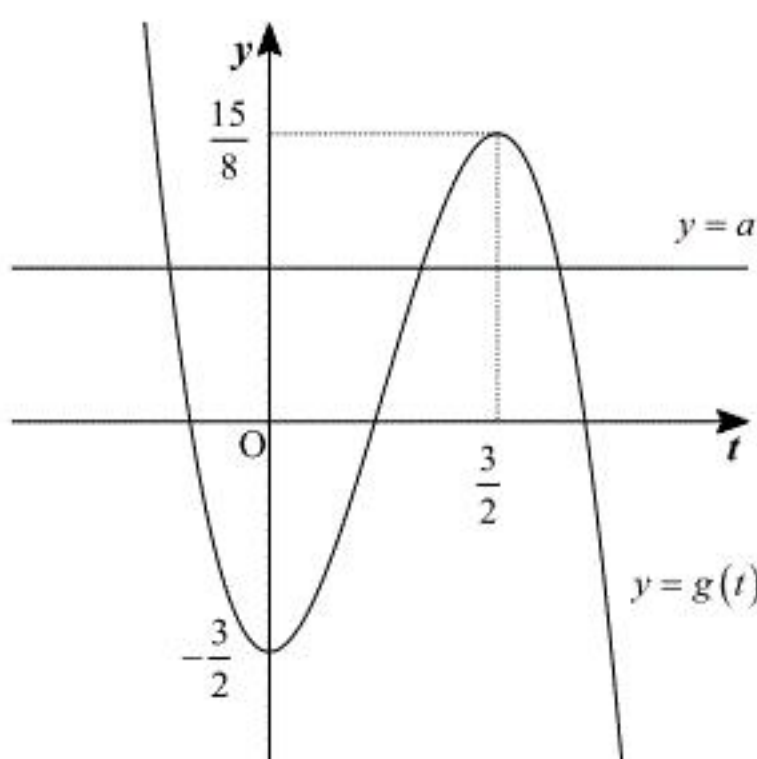
と $y = a$ が 3 つの異なる点で交わる時となる。ここで

$$g'(t) = -6t^2 + 9t = -3t(2t - 3)$$

となる。よって $g(t) = -2t^3 + \frac{9}{2}t^2 - \frac{3}{2}$ の増減表は以下ようになる。

t	...	0	...	$\frac{3}{2}$	...
$g'(t)$	－	0	+	0	－
$g(t)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

増減表より極大値は $g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{8}$ 、極小値は $g(0) = -\frac{3}{2}$ となる。よって $y = g(t)$ のグラフは以下の図のようになる。



したがって、 $y = g(t)$ のグラフと $y = a$ の交点が 3 つとなるのは

$$-\frac{3}{2} < a < \frac{15}{8}$$

のときである。