

【解答】

(1)	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$		
	2	6		
(2)	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$
	1	2	7	3

【解説】

(1)

真数条件より、

$$\begin{cases} x > 0 \\ x-2 > 0 \\ 2x-3 > 0 \end{cases}$$

$$\therefore x > 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。①の条件のもとで与式を変形すると、

$$\log_3 x - \log_9 (x-2) > \log_9 (2x-3)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x > \log_9 \{(x-2)(2x-3)\}$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x > \frac{\log_3 \{(x-2)(2x-3)\}}{\log_3 9}$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3 x > \log_3 \{(x-2)(2x-3)\}$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x^2 > \log_3 \{(x-2)(2x-3)\}$$

となる。ここで、底3は1よりも大きいから、

$$\log_3 x^2 > \log_3 \{(x-2)(2x-3)\}$$

$$\Leftrightarrow x^2 > (x-2)(2x-3)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-6) < 0$$

$$\Leftrightarrow 1 < x < 6$$

$$\therefore 2 < x < 6 (\because \textcircled{1})$$

となり、これが与式を満たす x の値の範囲である。

(2)

真数条件および対数の底の条件に注意して、

$$0 < x < 1, 1 < x \quad \dots \textcircled{2}$$

の範囲で考える。②の条件のもとで方程式を解くと、

$$2\log_3 x - 3\log_x 3 + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3 x - 3 \cdot \frac{\log_3 3}{\log_3 x} + 5 = 0 \quad (\because \log_3 x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 2(\log_3 x)^2 + 5\log_3 x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\log_3 x - 1)(\log_3 x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x = \frac{1}{2}, -3$$

$$\therefore x = \frac{1}{27}, \sqrt{3}$$

である。これは確かに②を満たす。

Ⅱ

【解答】

(1)	7	8	9	10			
	1	1	6	4			
(2)	11	12	13	14			
	2	1	6	4			
(3)	15	16					
	5	8					
(4)	17	18	19	20	21	22	23
	5	8	5	2	0	4	8

【解説】

1回コインを投げたとき、表、裏が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ である。

(1)

1回戦でAが優勝するのは、

[1] Aが表を2枚出し、B、Cがそれぞれ裏を少なくとも1枚出した場合

[2] Aが表と裏を1枚ずつ出し、B、Cがそれぞれ裏を2枚出した場合

のいずれかの場合のみであり、これらの事象は互いに排反である。したがって、求める確率は

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{11}{64}$$

となる。

(2)

1回戦の勝ち残りが3人であるのは、A、B、Cの出した表の枚数が同じ場合であり、その確率は

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\right)^3 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{64} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、1回戦の勝ち残りが1人のみである確率は、(1)の結果より、A、B、Cの誰が優勝するかの3通りあることを考慮して、

$$\frac{11}{64} \cdot 3 = \frac{33}{64} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。したがって、余事象を考えて、求める確率は

$$1 - \left(\frac{10}{64} + \frac{33}{64}\right) = \frac{21}{64} \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。

(3)

2人で2回戦を行ったとき、優勝者が決まらないのは2人の出した表の枚数が同じ場合で、その確率は

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

である。余事象を考えて、求める確率は

$$1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8} \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。

(4)

2回戦で優勝者が決まるのは、

[1] 1回戦で3人勝ち残り、2回戦で優勝者が決まる場合

[2] 1回戦で2人勝ち残り、2回戦で優勝者が決まる場合

のいずれかの場合のみであり、これらの事象は互いに排反である。[1]の確率は、①、②より

$$\frac{10}{64} \cdot \frac{33}{64} = \frac{330}{64^2}$$

である。[2]の確率は、③、④より

$$\frac{21}{64} \cdot \frac{5}{8} = \frac{840}{64^2}$$

である。以上より、求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{330}{64^2} + \frac{840}{64^2} &= \frac{1170}{64^2} \\ &= \frac{585}{2048} \end{aligned}$$

となる。

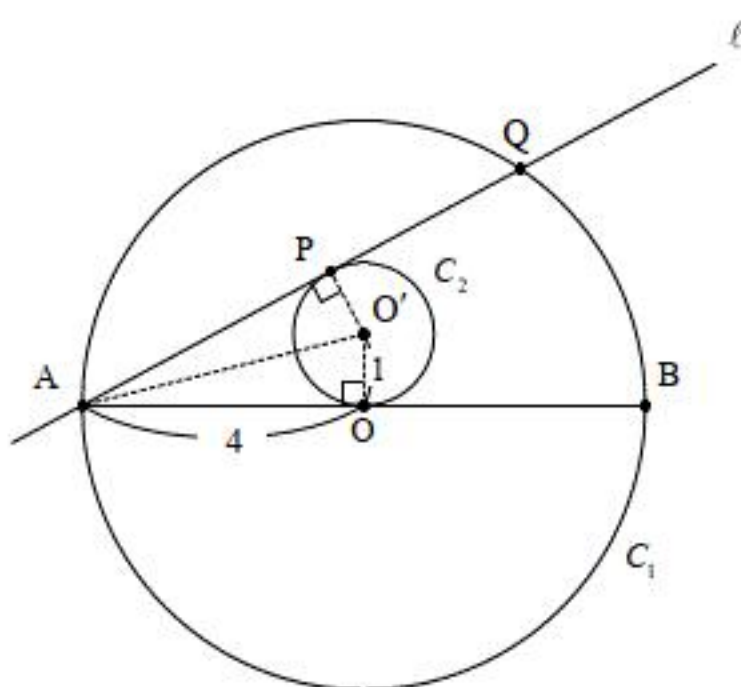
III

【解答】

24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
1	5	1	7	8	1	7	1	2	0
34	35	36	37	38	39	40	41	42	
1	7	3	8	4	0	2	8	9	

【解説】

円 C_2 の中心を O' とおき、また $\angle OAP = \theta$ 、 $\triangle QAB$ の面積を S とおく。



点 P , O は、点 A から C_2 に対して引いた接線と C_2 の接点であるから、

$O'O = O'P$, $\angle O'OA = \angle O'PA = \frac{\pi}{2}$ が成り立つ。これらのことと共通辺 $O'A$ より、 $\triangle O'OA \equiv \triangle$

$O'PA$ となる。ゆえに $\angle O'AO = \angle O'AP$ が成り立ち、このことから

$$\begin{aligned}\theta &= \angle O'AP + \angle O'AO \\ &= 2\angle O'AO \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。ここで、直角三角形 $O'OA$ に注目する。 $O'O = 1$, $OA = 4$, $\angle O'OA = \frac{\pi}{2}$ であるから、三

平方の定理より

$$\begin{aligned}O'A^2 &= OA^2 + O'O^2 \\ &= 1^2 + 4^2 \\ &= 17\end{aligned}$$

$$\therefore O'A = \sqrt{17}$$

となり、

$$\begin{aligned}\cos \angle O'AO &= \frac{AO}{O'A} \\ &= \frac{4}{\sqrt{17}} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

である。以上、 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \cos 2\angle O'AO \\ &= 2\cos^2 \angle O'AO - 1 \\ &= 2 \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{17}} \right)^2 - 1 \\ &= \frac{15}{17}\end{aligned}$$

となる。また、 $0 < \theta < \pi$ であるから $\sin \theta > 0$ で、

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{15}{17} \right)^2} \\ &= \frac{8}{17}\end{aligned}$$

となる。つづけて、 $\triangle OAQ$ に注目する。 $\triangle OAQ$ は $OA = OQ$ の二等辺三角形であるから、

$\angle OAQ = \angle OQA = \theta$ となり、

$$\begin{aligned}AQ &= 2 \cdot AO \cdot \cos \theta \\ &= 8 \cdot \frac{15}{17} \\ &= \frac{120}{17}\end{aligned}$$

を得る。以上のことから $AQ = \frac{120}{17}$, $\sin \theta = \frac{8}{17}$ であり、また $AB = 8$ であるから、求める面積 S

は

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot AQ \cdot AB \cdot \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{120}{17} \cdot 8 \cdot \frac{8}{17} \\ &= \frac{3840}{289}\end{aligned}$$

となる。

IV

【解答】

(1)	43	44	45							
	－	3	1							
(2)	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
	3	2	3	6	5	1	0	4	3	2

【解説】

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 + 2x - 3 \\ &= (x+3)(x-1) \end{aligned}$$

より、 $f'(x)=0$ を満たす x の値は $-3, 1$ である。

(2)

(1)より、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

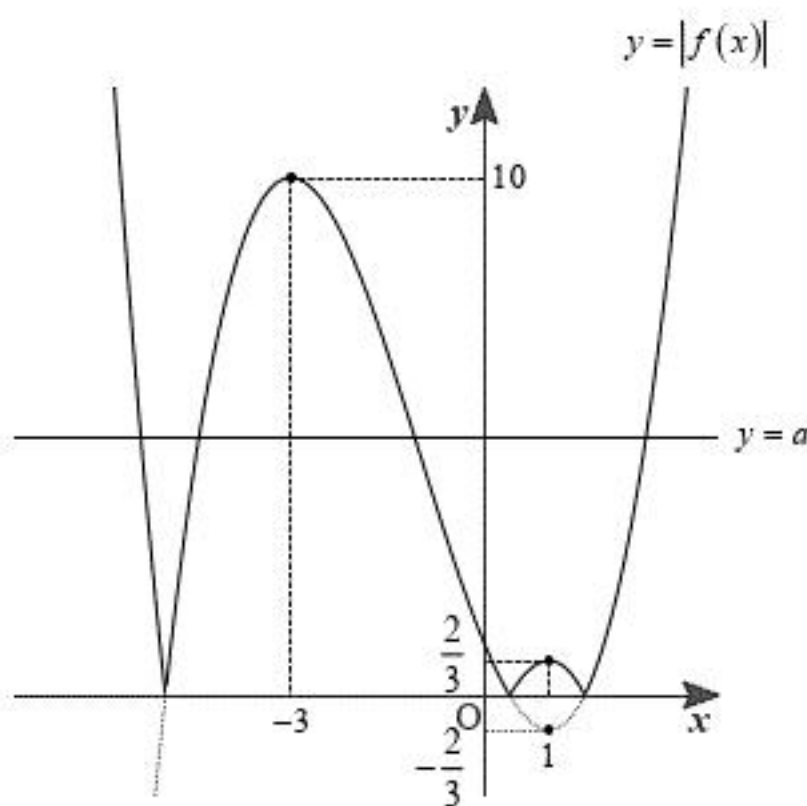
x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	+	0	－	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

また、 $f(x)$ の極大値と極小値はそれぞれ

$$\begin{aligned} f(-3) &= \frac{1}{3} \cdot (-3)^3 + (-3)^2 - 3 \cdot (-3) + 1 \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{3} \cdot 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

となるから、 $y=|f(x)|$ のグラフは以下のようになる。



方程式 $|f(x)|=a$ の異なる実数解の個数は、 $y=|f(x)|$ と $y=a$ の共有点の個数に等しい。グラ

フより、 $y=|f(x)|$ と $y=a$ の共有点の個数を数えると、

$a=0$ のとき 3 個

$0 < a < \frac{2}{3}$ のとき 6 個

$a = \frac{2}{3}$ のとき 5 個

$\frac{2}{3} < a < 10$ のとき 4 個

$a=10$ のとき 3 個

$a > 10$ のとき 2 個

である。