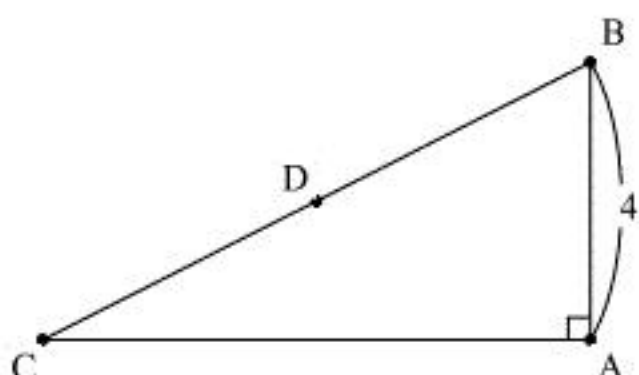


〔解答〕

(1)	1	2	3	4	5	6	7	8
	9	2	2	7	2	2	7	8
(2)	9	10	11	12	13	14	15	16
	3	4	3	0	6	5	6	3

〔解説〕

(1)



$\cos \angle C = \frac{7}{9}$ と $0 < \angle C < \pi$ より,

$$\sin \angle C = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{9}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

となる。よって,

$$BC = \frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{4}{\frac{4\sqrt{2}}{9}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

$$AC = BC \cos \angle C = \frac{9\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

である。また、BC の中点を点 D とすると、 $\angle A = 90^\circ$ より円周角の定理の逆から D は三角形 ABC の外接円の中心となる。よって,

$$AD = BD = CD = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

が成り立つ。ここで、三角形 ACD の面積を S 、内接円の半径を r とすると,

$$S = \frac{1}{2}r(AC + AD + CD)$$

が成り立つから,

$$S = \frac{1}{2}r(AC + AD + CD)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}CD \cdot AC \sin \angle C = \frac{1}{2}r(AC + AD + CD)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{9} = \frac{1}{2}r \left(\frac{7\sqrt{2}}{2} + \frac{9\sqrt{2}}{4} + \frac{9\sqrt{2}}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{7\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}r$$

$$\therefore r = \frac{7}{8}$$

となる。

(2)

直角三角形 ABC は $AB = 16$ かつ BC, AC がともに整数で $AB < AC$ であるため,

$BC = m, AC = n$ (m, n は正の整数で $16 < n < m$) とおける。三角形 ABC について三平方の定理より,

$$16^2 + n^2 = m^2$$

$$\Leftrightarrow 2^8 = m^2 - n^2$$

$$\Leftrightarrow 2^8 = (m+n)(m-n)$$

が成り立つ。ここで、 m, n は正の整数で $n < m$ を満たすから、 $m+n, m-n$ は正の整数で $m+n > m-n$ であるので,

$$(m+n, m-n) = (2^8, 1), (2^7, 2), (2^6, 2^2), (2^5, 2^3)$$

$$\therefore (m, n) = \left(\frac{257}{2}, \frac{255}{2} \right), (65, 63), (34, 30), (20, 12)$$

となる。 m, n は正の整数で $16 < n < m$ であることから,

$$(BC, AC) = (34, 30), (65, 63)$$

とわかる。

〔解答〕

(1)	17	18	19	20
	2	2	2	3
(2)	21	22	23	
	2	2	2	

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\sqrt{3}} \log(x^2 + 1) dx &= \int_0^{\sqrt{3}} (x)' \log(x^2 + 1) dx \\
 &= \left[x \log(x^2 + 1) \right]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} x \left\{ \log(x^2 + 1) \right\}' dx \\
 &= \sqrt{3} \log 4 - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x^2}{x^2 + 1} dx \\
 &= 2\sqrt{3} \log 2 - 2 \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx \\
 &= 2\sqrt{3} \log 2 - 2 \int_0^{\sqrt{3}} dx + 2 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + 1} dx \\
 &= 2\sqrt{3} \log 2 - 2\sqrt{3} + 2 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + 1} dx
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + 1} dx$ を $x = \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ を満たすような θ で置換すると、積分変数について以下のような関係が成り立つ。

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

また、積分区間は以下の表のように対応する。

x	0	$\rightarrow$	$\sqrt{3}$
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{3}$

これらより、

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \theta}} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \\
 &= \frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

となる。よって、求める値は、

$$\int_0^{\sqrt{3}} \log(x^2 + 1) dx = 2\sqrt{3} \log 2 - 2\sqrt{3} + \frac{2}{3} \pi$$

とわかる。

(2)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{1 + \frac{k}{n}}} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}}
 \end{aligned}$$

となる。これより、区分求積法を用いると、求める極限值は、

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}} \right) &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx \\
 &= \left[2\sqrt{1+x} \right]_0^1 \\
 &= 2\sqrt{2} - 2
 \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

(1)	35	36	37	38	39	40	41	42
	5	3	6	3	1	2	1	6
(2)	43	44	45	46	47	48	49	
	3	1	1	2	5	5	6	

〔解説〕

(1)

まず p_2 を求める。1回サイコロを振っても点Pは8より左にあるから、2回投げたサイコロの目の和が8になれば良い。そのような目の組は

$$(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$$

の5通り存在する。目の出方は $6^2 = 36$ (通り) 存在し、いずれも同様に確からしいから、求める

確率は $p_2 = \frac{5}{36}$ である。

次に p_3 を求める。サイコロをちょうど k 回投げた後の点Pと8の距離を X_k とおく。2回サイコロを投げた後のPの位置は2, 3, ..., 12であるから、 $X_2 = 0, 1, \dots, 6$ である。 p_2 の値と、ちよ

うど1回でゲームが終了することはないことから、 $X_2 = 0$ となる確率は $p_2 = \frac{5}{36}$,

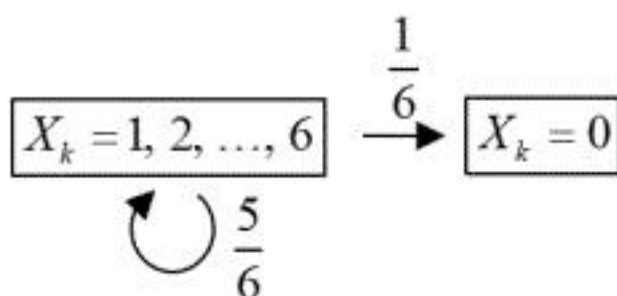
$X_2 = 1, 2, \dots, 6$ となる確率は $1 - p_2 = \frac{31}{36}$ である。

ここで、 $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ に対し、 $X_k = a$ のときの X_{k+1} への推移を考える。 b を1以上6以下の自然数とする。 $X_k = a$ のときに $k+1$ 回目に振ったサイコロの目が b だとする。 $a = b$ のと

きは $X_{k+1} = 0$ で、この確率は $\frac{1}{6}$ である。 $a \neq b$ のときは $X_{k+1} = |a - b|$ で、 $1 \leq |a - b| \leq 5$ であり、

この確率は $\frac{5}{6}$ である。したがって、 $X_{k+1} = 1, 2, \dots, 6$ となるのは確率 $\frac{5}{6}$, $X_{k+1} = 0$ となるのは確

率 $\frac{1}{6}$ で起こる。よって、 $k \geq 2$ における X_k の推移図は以下のようになる。



p_3 は $X_2 = 1, 2, \dots, 6$ かつ $X_3 = 0$ となる確率であるから、推移図より

$$p_3 = \frac{31}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{31}{216}$$

である。

(2)

$k \geq 2$ に対し、 $X_k = 1, 2, \dots, 6$ となる確率を q_k とおく。(1)の過程より $q_2 = \frac{31}{36}$ である。また、(1)

の推移図より

$$q_{k+1} = \frac{5}{6} q_k$$

である。したがって、数列 $\{q_k\}$ は初項 q_2 、公比 $\frac{5}{6}$ の等比数列であるから、

$$q_k = \frac{31}{36} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-2}$$

である。 $n \geq 4$ に対し、 p_n は $X_{n-1} = 1, 2, \dots, 6$ かつ $X_n = 0$ となる確率であるから、(1)の推移図より

$$\begin{aligned} p_n &= q_{n-1} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{31}{216} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} \\ &= \frac{31}{125} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n \end{aligned}$$

である。

〔解答〕

(1)	50	51			
	1	4			
(2)	52	53	54	55	56
	1	3	4	5	4
(3)	57	58			
	1	0			

〔解説〕

(1)

円 C_t の中心の y 座標が円 C_t の半径以下であれば良いから、 $t \geq 0$ と合わせて

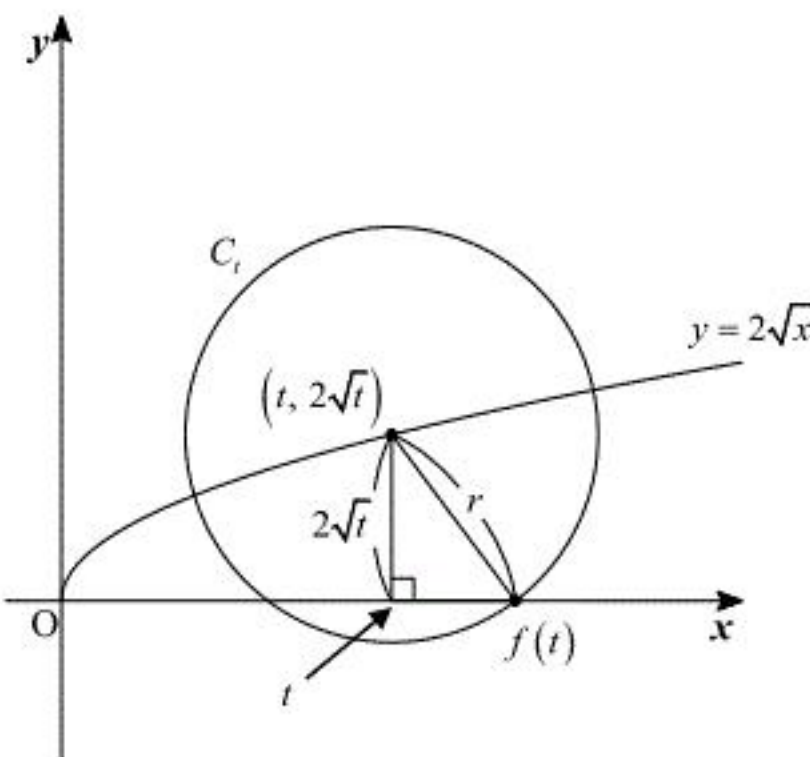
$$2\sqrt{t} \leq r$$

$$\therefore 0 \leq t \leq \frac{1}{4}r^2$$

と求まる。

(2)

曲線 $y = 2\sqrt{x}$ と円 C_t を図示すると以下のようになる。



上図において、三平方の定理より

$$\begin{aligned} f(t) - t &= \sqrt{r^2 - (2\sqrt{t})^2} \\ \Leftrightarrow f(t) &= t + \sqrt{r^2 - 4t} \end{aligned}$$

となる。ただし、定義域は(1)より $0 \leq t \leq \frac{1}{4}r^2$ である。 $r = 3$ のとき

$$f(t) = t + \sqrt{9 - 4t} \quad (0 \leq t \leq \frac{9}{4})$$

であるから、 t で微分すると

$$\begin{aligned} f'(t) &= 1 - \frac{4}{2\sqrt{9 - 4t}} \\ &= \frac{\sqrt{9 - 4t} - 2}{\sqrt{9 - 4t}} \\ &= \frac{(9 - 4t) - 2^2}{\sqrt{9 - 4t}(\sqrt{9 - 4t} + 2)} \\ &= \frac{5 - 4t}{\sqrt{9 - 4t}(\sqrt{9 - 4t} + 2)} \end{aligned}$$

となる。 $f'(t)$ の分母は常に正であるから、増減表は以下のようになる。

t	0	...	$\frac{5}{4}$	...	$\frac{9}{4}$
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$	3		$\frac{13}{4}$		$\frac{9}{4}$

よって、 $r = 3$ であれば $M = \frac{13}{4}$ であり、そのときの t の値は $t = \frac{5}{4}$ となる。

(3)

$r = 1$ のとき、(2)と同様に考えると

$$f(t) = t + \sqrt{1 - 4t} \quad (0 \leq t \leq \frac{1}{4})$$

であるから、 t で微分すると

$$\begin{aligned} f'(t) &= 1 - \frac{4}{2\sqrt{1 - 4t}} \\ &= \frac{\sqrt{1 - 4t} - 2}{\sqrt{1 - 4t}} \\ &= \frac{(1 - 4t) - 2^2}{\sqrt{1 - 4t}(\sqrt{1 - 4t} + 2)} \\ &= -\frac{3 + 4t}{\sqrt{1 - 4t}(\sqrt{1 - 4t} + 2)} \end{aligned}$$

となる。したがって $f'(t) < 0$ であるから $f(t)$ は単調減少し、 $0 < t \leq \frac{1}{4}$ において

$$f(t) < f(0) = 1$$

が成立する。よって、 $r = 1$ であれば $M = 1$ であり、そのときの t の値は $t = 0$ である。