

【解答】

(1)	1	2	3		
	1	2	4		
(2)	4	5	6		
	7	2	4		
(3)	7	8	9	10	11
	2	5	4	3	2

【解説】

(1)

$z = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi$ より, $z^3 = (z^{-1})^3 = 1$ である。したがって, z を 3 回, もしくは z^{-1} を 3 回選べばよい。すなわち, 1 または 2 が 3 回, もしくは 3 が 3 回出ればよい。ここで, サイコロを 3 回投げたときの目の出方は全部で 6^3 通りであり, これらは同様に確からしい。以上より求める確率は,

$$\frac{2^3 + 1^3}{6^3} = \frac{1}{24}$$

となる。

(2)

(1)より, 3つの複素数の積が1となる確率は $\frac{1}{24}$ であるので, 3つの複素数の積が1ではなく,

かつ絶対値が1となる確率を考える。ここで, $|z|=1, |z^{-1}|=1, z \cdot z^{-1}=1, w \cdot w^{-1}=1$ であるから,

複素数の組み合わせは

$$(z, z, z^{-1}), (z, z^{-1}, z^{-1}), (z, w, w^{-1}), (z^{-1}, w, w^{-1})$$

となる。以上より3つの複素数の積が1ではなく, かつ絶対値が1となる確率は,

$$\frac{2^2 \cdot 1 \cdot {}_3C_1 + 2 \cdot 1^2 \cdot {}_3C_1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3! + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3!}{6^3} = \frac{1}{4}$$

である。3つの複素数の積が1となる事象と3つの複素数の積が1ではなく, かつ絶対値が1となる事象は排反であるので, 求める確率は

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{4} = \frac{7}{24}$$

となる。

(3)

(1)より z を 3 回, もしくは z^{-1} を 3 回選び, さらに $z \cdot z^{-1}=1, w \cdot w^{-1}=1$ であることから z, z^{-1} または w, w^{-1} を残りの 2 回で選べばよい。したがって複素数の組み合わせは

$$\begin{aligned} & (z, z, z, z, z^{-1}) \\ & (z, z, z, w, w^{-1}) \\ & (z^{-1}, z^{-1}, z^{-1}, z, z^{-1}) \\ & (z^{-1}, z^{-1}, z^{-1}, w, w^{-1}) \end{aligned}$$

となる。ここで, サイコロを 5 回投げたときの目の出方は全部で 6^5 通りであり, これらは同様に確からしい。以上より求める確率は,

$$\frac{2^4 \cdot 1 \cdot {}_5C_1 + 2^3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot {}_5P_2 + 1^3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot {}_5C_1 + 1^3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot {}_5P_2}{6^5} = \frac{25}{432}$$

である。

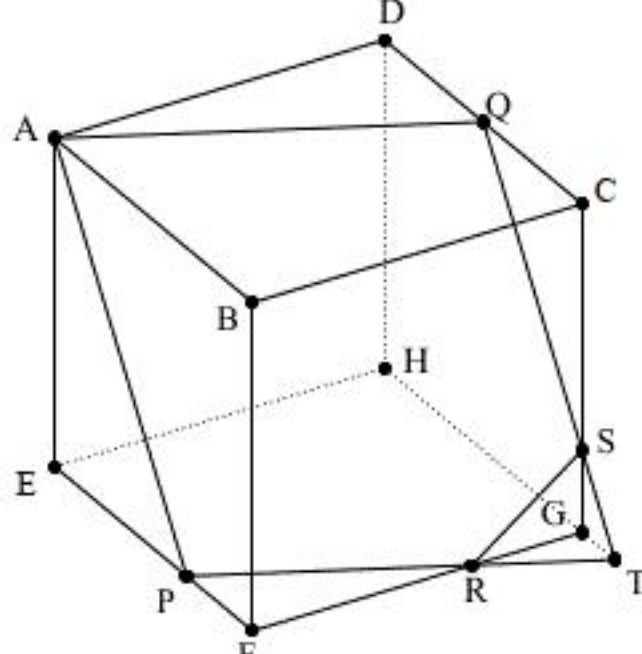
【解答】

(1)	12	13	14	15	16	17
	2	3	3	4	7	6
(2)	18	19	20	21	22	
	6	1	1	4	4	

【解説】

(1)

立方体 $ABCD-EFGH$ と 5 点 P, Q, R, S, T を図示すると下図のようになる。



$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

であり、点 R は $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}$ で張られた平面 α 上にあるので、ある実数 s, t を用いて、

$$\overrightarrow{AR} = s\overrightarrow{AP} + t\overrightarrow{AQ}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AR} = \left(\frac{2}{3}s + \frac{1}{2}t\right)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AD} + s\overrightarrow{AE} \quad \cdots \textcircled{1}$$

と表される。一方で、点 R は辺 FG 上にあるので、ある実数 u を用いて、

$$\overrightarrow{FR} = u\overrightarrow{FG}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{FR} = u\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FR}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB} + u\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \quad \cdots \textcircled{2}$$

と表される。したがって、 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ は一次独立であるから、①と②を比較することで、

$$\begin{cases} \frac{2}{3}s + \frac{1}{2}t = 1 \\ t = u \\ s = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = 1 \\ t = \frac{2}{3} \\ u = \frac{2}{3} \end{cases}$$

となる。以上より、

$$\overrightarrow{FR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FG}$$

である。同様に点 S についても考えると、点 S は平面 α 上にあるので、ある実数 s', t' を用いて、

$$\overrightarrow{AS} = s'\overrightarrow{AP} + t'\overrightarrow{AQ}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AS} = \left(\frac{2}{3}s' + \frac{1}{2}t'\right)\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AD} + s'\overrightarrow{AE} \quad \cdots \textcircled{3}$$

と表される。一方で、点 S は辺 CG 上にあるので、ある実数 u' を用いて、

$$\overrightarrow{CS} = u'\overrightarrow{CG}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CS} = u'\overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CS}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + u'\overrightarrow{AE} \quad \cdots \textcircled{4}$$

と表される。したがって、③と④を比較することで、

$$\begin{cases} \frac{2}{3}s' + \frac{1}{2}t' = 1 \\ t' = 1 \\ s' = u' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s' = \frac{3}{4} \\ t' = 1 \\ u' = \frac{3}{4} \end{cases}$$

となる。以上より、

$$\overrightarrow{CS} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CG}$$

である。最後に点 T について考えると、点 T は平面 α 上にあるので、ある実数 s'', t'' を用いて、

$$\overrightarrow{AT} = s''\overrightarrow{AP} + t''\overrightarrow{AQ}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AT} = \left(\frac{2}{3}s'' + \frac{1}{2}t''\right)\overrightarrow{AB} + t''\overrightarrow{AD} + s''\overrightarrow{AE} \quad \cdots \textcircled{5}$$

と表される。一方で、点 T は辺 HG 上にあるので、ある実数 u'' を用いて、

$$\overrightarrow{HT} = u''\overrightarrow{HG}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{HT} = u''\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HT}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AT} = u''\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \quad \cdots \textcircled{6}$$

と表される。したがって、⑤と⑥を比較することで、

$$\begin{cases} \frac{2}{3}s'' + \frac{1}{2}t'' = u'' \\ t'' = 1 \\ s'' = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s'' = 1 \\ t'' = 1 \\ u'' = \frac{7}{6} \end{cases}$$

となる。以上より、

$$\overrightarrow{HT} = \frac{7}{6}\overrightarrow{HG}$$

である。

(2)

(1)より、

$$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{AT} = \frac{7}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$$

であるので、

$$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AR}$$

$$= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}\right) - \left(\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AR}$$

$$= \left(\frac{7}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right) - \left(\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

$$|\overrightarrow{RS}|^2 = \left|\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}\right|^2$$

$$= \frac{1}{9}|\overrightarrow{AD}|^2 - \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} + \frac{1}{16}|\overrightarrow{AE}|^2$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \left(\because |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AE}| = 1, \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AE}\right)$$

$$= \frac{25}{144}$$

$$|\overrightarrow{RT}|^2 = \left|\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right|^2$$

$$= \frac{1}{36}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{1}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{9}|\overrightarrow{AD}|^2$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{9} \left(\because |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = 1, \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}\right)$$

$$= \frac{5}{36}$$

$$\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{RT} = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)$$

$$= \frac{1}{18}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{9}|\overrightarrow{AD}|^2 - \frac{1}{24}\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{12}\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$= \frac{1}{9} \left(\because |\overrightarrow{AD}| = 1, \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{AB}\right)$$

となる。したがって、

$$\triangle RST = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{RS}|^2 |\overrightarrow{RT}|^2 - (\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{RT})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{25}{144} \cdot \frac{5}{36} - \frac{1}{81}}$$

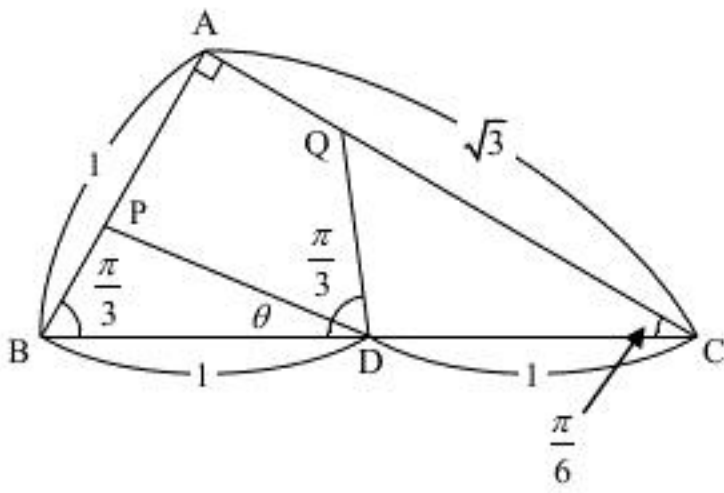
$$= \frac{\sqrt{61}}{144}$$

である。

3

(1)

三角形 ABC を図示すると以下のようになる。



上図において、

$$\angle CDQ = \pi - \left(\frac{\pi}{3} + \theta \right) = \frac{2}{3}\pi - \theta$$

である。また、三角形 ABD は辺の長さが 1 の正三角形となるから

$$\angle BDA = \frac{\pi}{3}, \angle CDA = \frac{2}{3}\pi$$

となる。よって、点 P が辺 AB 上に存在する条件は

$$\begin{aligned} 0 &\leq \angle BDP \leq \angle BDA \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。また、点 Q が辺 AC 上に存在する条件は

$$\begin{aligned} 0 &\leq \angle CDQ \leq \angle CDA \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \frac{2}{3}\pi - \theta \leq \frac{2}{3}\pi \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。①かつ②が θ のとりうる値の範囲であるから、求める解は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ である。

(答) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$

(2)

三角形 BDP において

$$\angle BPD = \pi - \left(\frac{\pi}{3} + \theta \right) = \frac{2}{3}\pi - \theta$$

であるから、正弦定理より

$$\begin{aligned} \frac{PD}{\sin \angle PBD} &= \frac{BD}{\sin \angle BPD} \\ \Leftrightarrow PD &= \frac{1}{\sin \left(\frac{2}{3}\pi - \theta \right)} \sin \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow PD &= \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \left(\frac{2}{3}\pi - \theta \right)} \end{aligned}$$

と求まる。また、三角形 CDQ において

$$\angle CQD = \pi - \left\{ \frac{\pi}{6} + \left(\frac{2}{3}\pi - \theta \right) \right\} = \frac{\pi}{6} + \theta$$

であるから、正弦定理より

$$\begin{aligned} \frac{QD}{\sin \angle QCD} &= \frac{CD}{\sin \angle CQD} \\ \Leftrightarrow QD &= \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi}{6} + \theta \right)} \sin \frac{\pi}{6} \\ \Leftrightarrow QD &= \frac{1}{2 \sin \left(\frac{\pi}{6} + \theta \right)} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(答) \quad PD = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \left(\frac{2}{3}\pi - \theta \right)}, \quad QD = \frac{1}{2 \sin \left(\frac{\pi}{6} + \theta \right)}$$

(3)

(1), (2) の結果より、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} PD \cdot QD \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \left(\frac{2}{3}\pi - \theta \right)} \cdot \frac{1}{2 \sin \left(\frac{\pi}{6} + \theta \right)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3}{16 \sin \left(\frac{2}{3}\pi - \theta \right) \sin \left(\frac{\pi}{6} + \theta \right)} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(答) \quad \frac{3}{16 \sin \left(\frac{2}{3}\pi - \theta \right) \sin \left(\frac{\pi}{6} + \theta \right)}$$

(4)

$$T = \sin \left(\frac{2}{3}\pi - \theta \right) \sin \left(\frac{\pi}{6} + \theta \right) \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3})$$

とおく。このとき $S = \frac{3}{16T}$ と表せる。積和の公式を用いて、 T を変形すると

$$\begin{aligned} T &= -\frac{1}{2} \left[\cos \left\{ \left(\frac{2}{3}\pi - \theta \right) + \left(\frac{\pi}{6} + \theta \right) \right\} - \cos \left\{ \left(\frac{2}{3}\pi - \theta \right) - \left(\frac{\pi}{6} + \theta \right) \right\} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \cos \frac{5}{6}\pi - \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 2\theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq 2\theta \leq \frac{2}{3}\pi$ より、 T は

$$2\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ のとき、最大値 } \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$2\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \text{ のとき、最小値 } \frac{\sqrt{3}}{4}$$

をとる。したがって、 $S = \frac{3}{16T}$ かつ $T > 0$ より、 T が最小値 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ をとるとき S は最大値

$$\frac{3}{16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

をとる。また、 T が最大値 $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ をとるとき、 S は最小値

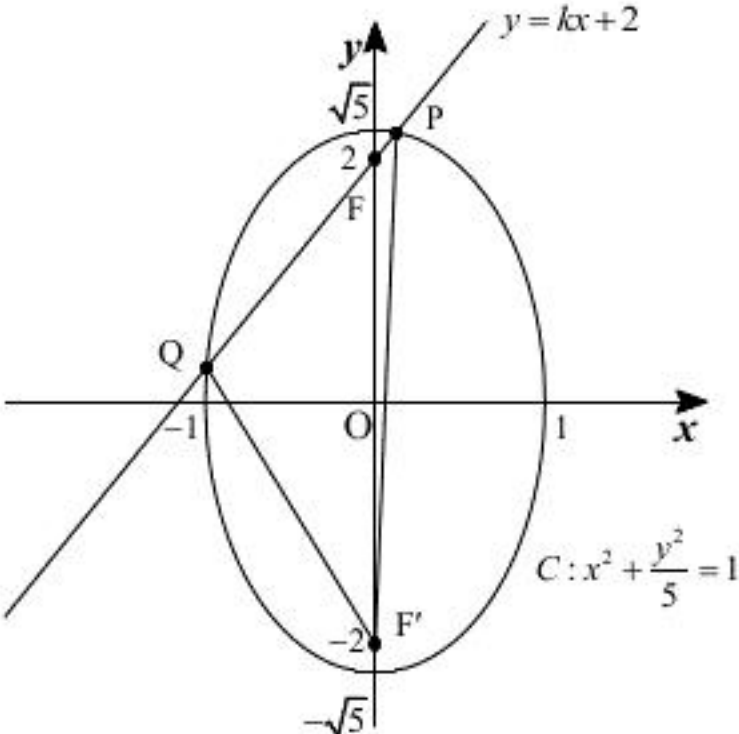
$$\frac{3}{16 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)} = \frac{3}{4(2 + \sqrt{3})} = \frac{3}{4}(2 - \sqrt{3})$$

をとる。

$$(答) \quad \text{最大値: } \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad \text{最小値: } \frac{3}{4}(2 - \sqrt{3})$$

(1)

楕円 C および直線 $y=kx+2$ を図示すると下図のようになる。



点 P, Q の x 座標は、楕円 $x^2 + \frac{y^2}{5} = 1$ と直線 $y=kx+2$ の方程式を連立して

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{(kx+2)^2}{5} &= 1 \\ \Leftrightarrow (5+k^2)x^2 + 4kx - 1 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{-2k \pm \sqrt{5(k^2+1)}}{5+k^2} \end{aligned}$$

とわかる。よって、 $\alpha = \frac{-2k - \sqrt{5(k^2+1)}}{5+k^2}$ 、 $\beta = \frac{-2k + \sqrt{5(k^2+1)}}{5+k^2}$ とすると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} FF'(\beta - \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{2\sqrt{5(k^2+1)}}{5+k^2} \\ &= \frac{4\sqrt{5(k^2+1)}}{5+k^2} \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad S = \frac{4\sqrt{5(k^2+1)}}{5+k^2}$$

(2)

S の最大値を与える k は

$$\frac{S^2}{80} = \frac{k^2+1}{(k^2+5)^2} = \frac{1}{k^2+5} - \frac{4}{(k^2+5)^2}$$

の最大値を与える。したがって、 $k^2 \geq 0$ より、 $k^2 = a$ ($a \geq 0$)、 $T(a) = \frac{S^2}{80}$ とおき、 $T(a)$ が最大となる a を調べればよい。

$$T(a) = \frac{1}{a+5} - \frac{4}{(a+5)^2}$$

より、

$$\begin{aligned} T'(a) &= -\frac{1}{(a+5)^2} + \frac{8}{(a+5)^3} \\ &= \frac{-a+3}{(a+5)^3} \end{aligned}$$

となるから、増減表は下表のようになる。

a	0	...	3	...
$T'(a)$		+	0	-
$T(a)$			極大	

増減表より、 $T(a)$ は $a=3$ のとき最大値 $T(3) = \frac{1}{16}$ をとるため、 S は $k = \pm\sqrt{3}$ のとき最大値 $\sqrt{5}$ をとる。

$$\text{(答)} \quad k = \pm\sqrt{3} \text{ のとき最大値 } \sqrt{5}$$

(3)

三角形 $F'PQ$ の内接円の半径を r とおくと、

$$S = \frac{1}{2}(PQ + QF' + F'P)r$$

を満たす。線分 PQ が焦点 F を通ることから、

$$PQ = PF + FQ$$

である。楕円の定義より、楕円上の任意の点から 2 つの焦点への距離の和は一定であり、楕円

$C: x^2 + \frac{y^2}{5} = 1$ について、その距離の和は $2\sqrt{5}$ であるから、

$$\begin{aligned} PQ + QF' + F'P &= PF + FQ + QF' + F'P \\ &= (PF + F'P) + (FQ + QF') \\ &= 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} \\ &= 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

である。以上より、 $k = \pm\sqrt{3}$ すなわち $S = \sqrt{5}$ のとき、

$$\begin{aligned} \sqrt{5} &= \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5}r \\ \therefore r &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{2}$$

(1)

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1} \text{ より}$$

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

であるから、

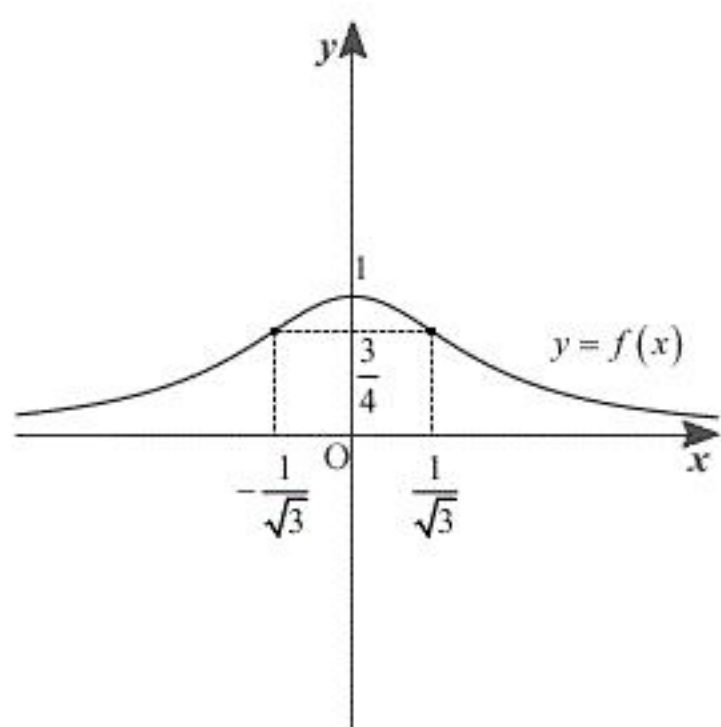
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

となる。したがって、 $f(x)$ の増減凹凸表は下表のようになる。

x	...	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$		$\frac{3}{4}$		1		$\frac{3}{4}$	

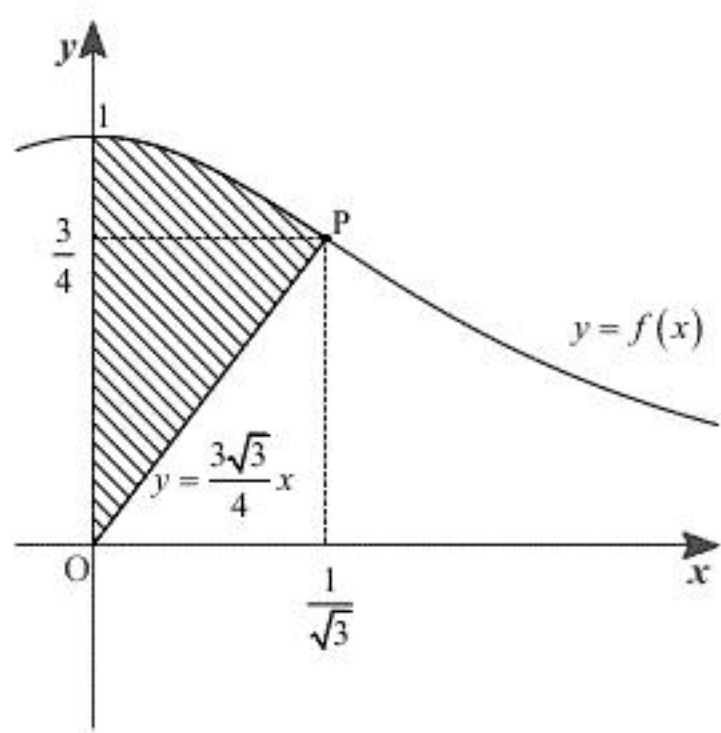
増減表と $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ より、 $y = f(x)$ のグラフの概形は次図のようになる。



(答) グラフの概形：前図、凹凸：前表参照

(2)

(1)より、点Pは $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$ だから図形Dは下図の斜線部である。



したがって、求める面積 S は

$$S = \int_0^{1/\sqrt{3}} f(x) dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{4} \quad \cdots \textcircled{1}$$

と立式できる。ここで、 $\int_0^{1/\sqrt{3}} f(x) dx = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1} dx$ を求めることを考える。 $x = \tan \theta$ と変数変換をすると

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

であり、積分範囲の対応は以下の通りとなる。

x	0	$\rightarrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{6}$

よって、

$$\begin{aligned} \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1} dx &= \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \int_0^{\pi/6} d\theta \\ &= [\theta]_0^{\pi/6} \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

となるから、 $\textcircled{1}$ に代入して

$$S = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

を得る。

$$\text{(答)} \quad \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

(3)

図形Dをy軸まわりに1回転してできる回転体は直線 $y = \frac{3}{4}$ の上下で形状が異なるため、分割して体積を求める。

[1] $0 \leq y \leq \frac{3}{4}$ の部分の体積

回転体の $0 \leq y \leq \frac{3}{4}$ の部分は、底面が半径 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ の円で高さが $\frac{3}{4}$ の円錐であるから、その

体積は

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \pi \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi}{12}$$

である。

[2] $\frac{3}{4} \leq y \leq 1$ の部分の体積

回転体の $\frac{3}{4} \leq y \leq 1$ の部分の体積は、

$$\int_{3/4}^1 \pi x^2 dy \quad (\text{ただし } y = \frac{1}{x^2+1})$$

と立式できる。 $y = \frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{y} - 1$ ($\because y > 0$) より、

$$\begin{aligned} \int_{3/4}^1 \pi x^2 dy &= \pi \int_{3/4}^1 \left(\frac{1}{y} - 1 \right) dy \\ &= \pi \left[\log|y| - y \right]_{3/4}^1 \\ &= \pi \left(\log \frac{4}{3} - \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

となる。

以上[1],[2]より、回転体の体積 V は

$$V = \frac{\pi}{12} + \pi \left(\log \frac{4}{3} - \frac{1}{4} \right) = \pi \left(\log \frac{4}{3} - \frac{1}{6} \right)$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad \pi \left(\log \frac{4}{3} - \frac{1}{6} \right)$$