

【解答】

(1)	1	2	3
	1	4	3
(2)	4	5	6
	8	5	2

【解説】

(1)

$abc_{(5)}, cba_{(5)}$ を 10 進法で表すと、それぞれ $5^2a+5b+c, 5^2c+5b+a$ となるから、題意より

$$\begin{aligned} 2(5^2a+5b+c) &= 5^2c+5b+a \\ \Leftrightarrow 50a+10b+2c &= 25c+5b+a \\ \Leftrightarrow 49a+5b &= 23c \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $1 \leq c \leq 4$ より、 $\textcircled{1}$ の左辺について、

$$23 \leq 49a+5b \leq 92 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。 $1 \leq a \leq 4$ および $0 \leq b \leq 4$ を考慮すると、 $\textcircled{2}$ を満たす a の値は 1 に限られることがわかる。 $a=1$ のとき、 $\textcircled{1}$ を変形すると、

$$23c-5b=49 \quad \cdots \textcircled{3}$$

が得られ、 $0 \leq b \leq 4$ および $1 \leq c \leq 4$ の範囲で $\textcircled{3}$ が成立するのは、

$$(b, c) = (4, 3)$$

のみである。以上より、求める組は $(a, b, c) = (1, 4, 3)$ である。

(2)

N を 10 進法で表すと、 $N = 5 \cdot 7^{99}$ であり、常用対数をとると

$$\begin{aligned} \log N &= \log_{10} 5 + \log_{10} 7^{99} \\ &= \log_{10} \frac{10}{2} + 99 \log_{10} 7 \\ &= 1 - \log_{10} 2 + 99 \log_{10} 7 \\ &= 1 - 0.3010 + 99 \cdot 0.8451 \\ &= 84.3639 \end{aligned}$$

である。ここで、 $\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$ より、

$$\begin{aligned} 0.3010 &< 0.3639 < 0.4771 \\ \Leftrightarrow \log_{10} 2 &< 0.3639 < \log_{10} 3 \\ \Leftrightarrow 84 + \log_{10} 2 &< 84.3639 < 84 + \log_{10} 3 \\ \Leftrightarrow 84 + \log_{10} 2 &< \log_{10} N < 84 + \log_{10} 3 \\ \Leftrightarrow 10^{84+\log_{10} 2} &< N < 10^{84+\log_{10} 3} \\ \Leftrightarrow 2 \cdot 10^{84} &< N < 3 \cdot 10^{84} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって N は 85 桁の数であり、最高位の数字は 2 である。

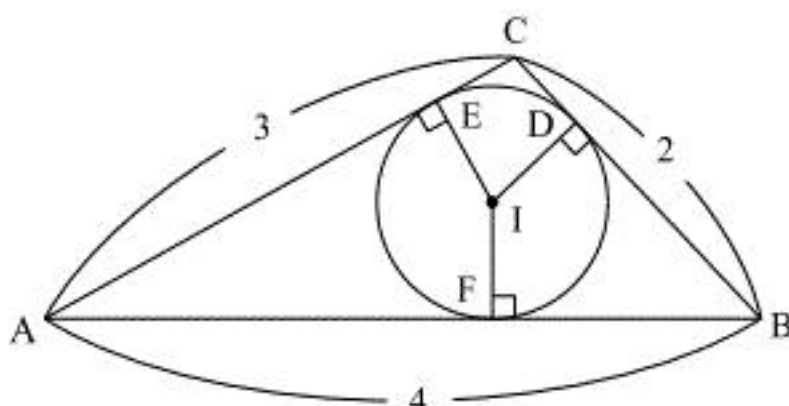
【解答】

(1)	7	8	9	10	11	12	13	14
	5	2	5	6	5	8	1	3
(2)	15	16	17	18	19	20	21	
	5	2	3	1	5	2	3	
(3)	22	23	24	25				
	2	0	2	3				

【解説】

(1)

内接円の中心をIとする。このとき、三角形ABCと内接円を図示すると以下のようになる。



上図より $ID = IE = IF$, $ID \perp BC$, $IE \perp CA$, $IF \perp AB$ であるから, $\triangle AEI \equiv \triangle AFI$, $\triangle BFI \equiv \triangle BDI$, $\triangle CDI \equiv \triangle CEI$ が成り立つ。したがって, $AE = AF$, $BF = BD$, $CD = CE$ であるから,

$$\begin{cases} x + y = 4 & \dots\dots ① \\ y + z = 2 & \dots\dots ② \\ z + x = 3 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

が成り立ち, ①～③を連立して解くと,

$$x = \frac{5}{2}, y = \frac{3}{2}, z = \frac{1}{2}$$

が得られる。よって, 前図より,

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{BF}{AB} = \frac{BD}{AB} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{CD}{BD} = \frac{CE}{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

である。

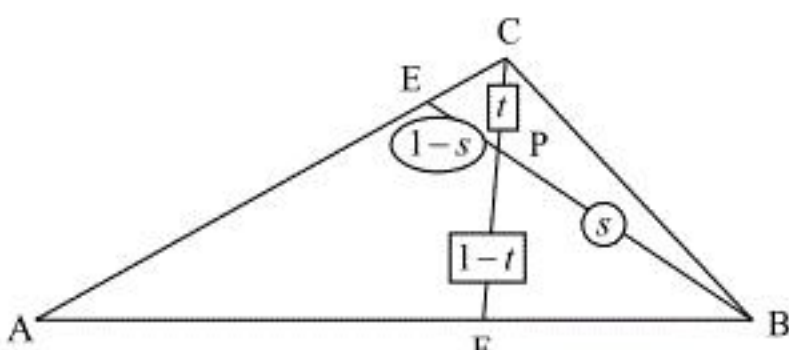
(2)

実数 s, t (ただし $0 < s < 1, 0 < t < 1$) を用いて

$$BP : PE = s : (1 - s)$$

$$CP : PF = t : (1 - t)$$

とおく。このとき、三角形ABCを図示すると以下のようになる。



上図および(1)の結果より,

$$\overrightarrow{AP} = (1 - s)\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AE}$$

$$= (1 - s)\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}s\overrightarrow{AC} \quad \dots\dots ④$$

$$\overrightarrow{AP} = (1 - t)\overrightarrow{AC} + t\overrightarrow{AF}$$

$$= \frac{5}{8}t\overrightarrow{AB} + (1 - t)\overrightarrow{AC} \quad \dots\dots ⑤$$

と表せる。3点A, B, Cは相異なる点であり, かつ同一直線上にないから

$$\begin{cases} 1 - s = \frac{5}{8}t \\ \frac{5}{6}s = 1 - t \end{cases}$$

が成り立つ。これを解くと, $s = \frac{18}{23}, t = \frac{8}{23}$ が得られる。したがって, ④, ⑤より,

$$\overrightarrow{AP} = \frac{5}{23}\overrightarrow{AB} + \frac{15}{23}\overrightarrow{AC}$$

である。

(3)

(1)の結果より,

$$\frac{CD}{BD} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow BD = 3CD$$

$$\Leftrightarrow BD : DC = 3 : 1$$

であるから,

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AD}$$

と表せる。よって, (2)の結果より

$$\overrightarrow{AP} = \frac{5}{23}\overrightarrow{AB} + \frac{15}{23}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{5}{23}(\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{5}{23} \cdot 4\overrightarrow{AD}$$

$$= \frac{20}{23}\overrightarrow{AD}$$

であることがわかる。

(1)

1回の操作における2個のサイコロの目の出方は 6^2 通りであり、これらは同様に確からしい。点P, Qがともに頂点Aにある最初の状態から1回の操作後に点P, Qが同じ頂点にある目の出方は、頂点Bから頂点Gまでの6箇所の頂点のうち、いずれかの同じ頂点に点P, Qがある場合を考えて6通りある。よって、求める確率は

$$p_1 = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$$

である。

(答) $\frac{1}{6}$

(2)

点P, Qが異なる頂点にある状態から1回の操作後に点P, Qが同じ頂点にある目の出方は、元々点P, Qがあった2つの頂点以外の5箇所の頂点のうち、いずれかの同じ頂点に点P, Qがある場合を考えて5通りある。よって、求める確率は

$$\frac{5}{6^2} = \frac{5}{36}$$

である。

(答) $\frac{5}{36}$

(3)

点P, Qが同じ頂点にある状態から1回の操作後に点P, Qが同じ頂点にある確率は、(1)と同様に $\frac{1}{6}$ である。また、1回目の操作後に点P, Qが異なる頂点にある確率は、 $1-p_1$ である。2回目の操作後に点P, Qが同じ頂点にあるのは、「1回目の操作後に点P, Qが同じ頂点にあり、次の操作で点P, Qが同じ頂点にある」場合と、「1回目の操作後に点P, Qが異なる頂点にあり、次の操作で点P, Qが同じ頂点にある」場合であり、これらは排反であるから、(1), (2)より求める確率は、

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{6}p_1 + \frac{5}{36}(1-p_1) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{36} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{31}{216} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{31}{216}$

(4)

$n+1$ 回目の操作後に点P, Qが同じ頂点にあるのは、「 n 回目の操作後に点P, Qが同じ頂点にあり、次の操作で点P, Qが同じ頂点にある」場合と、「 n 回目の操作後に点P, Qが異なる頂点にあり、次の操作で点P, Qが同じ頂点にある」場合であり、これらは排反であるから、(3)と同様にして、

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{6}p_n + \frac{5}{36}(1-p_n) \\ &= \frac{1}{36}p_n + \frac{5}{36} \end{aligned}$$

が成り立つ。この漸化式を整理すると、

$$p_{n+1} - \frac{1}{7} = \frac{1}{36} \left(p_n - \frac{1}{7} \right)$$

となるから、

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{7} &= \left(p_1 - \frac{1}{7} \right) \cdot \left(\frac{1}{36} \right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow p_n - \frac{1}{7} &= \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{2n-2} \\ \therefore p_n &= \frac{1}{7} + \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{2n-1} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $p_n = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{2n-1}$

まず、複素数平面上の3点 $0, z, (z+1)^2$ が互いに異なる点にならない場合を考える。

3点 $0, z, (z+1)^2$ が互いに異なる

$\Leftrightarrow$ (2点 $0, z$ が一致する) または (2点 $z, (z+1)^2$ が一致する) または (2点 $(z+1)^2, 0$ が一致する)

$\Leftrightarrow 0 = z$ または $z = (z+1)^2$ または $(z+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow z = 0$ または $z^2 + z + 1 = 0$ または $z = -1$

$\Leftrightarrow z = 0, -1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

であるから、 $z = 0, -1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ のとき、3点 $0, z, (z+1)^2$ のうち少なくとも2点が一致し、条件(*)を満たす。続いて、3点 $0, z, (z+1)^2$ が互いに異なる場合を考える。上記の考察により

3点 $0, z, (z+1)^2$ が互いに異なる

$\Leftrightarrow z \neq 0, -1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

であるから、以下 $z \neq 0, -1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ で考える。このとき、条件(*)は $\frac{(z+1)^2 - 0}{z - 0}$ が実数であることの必要十分条件である。ここで、 $z \neq 0$ より $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) とすると、

$\frac{(z+1)^2 - 0}{z - 0}$ が実数である

$\Leftrightarrow z + 2 + \frac{1}{z}$ が実数である ($\because z \neq 0$)

$\Leftrightarrow z + \frac{1}{z}$ が実数である

$\Leftrightarrow r(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta)$ が実数である

$\Leftrightarrow r \sin \theta - \frac{1}{r} \sin \theta = 0$

$\Leftrightarrow \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta = 0$

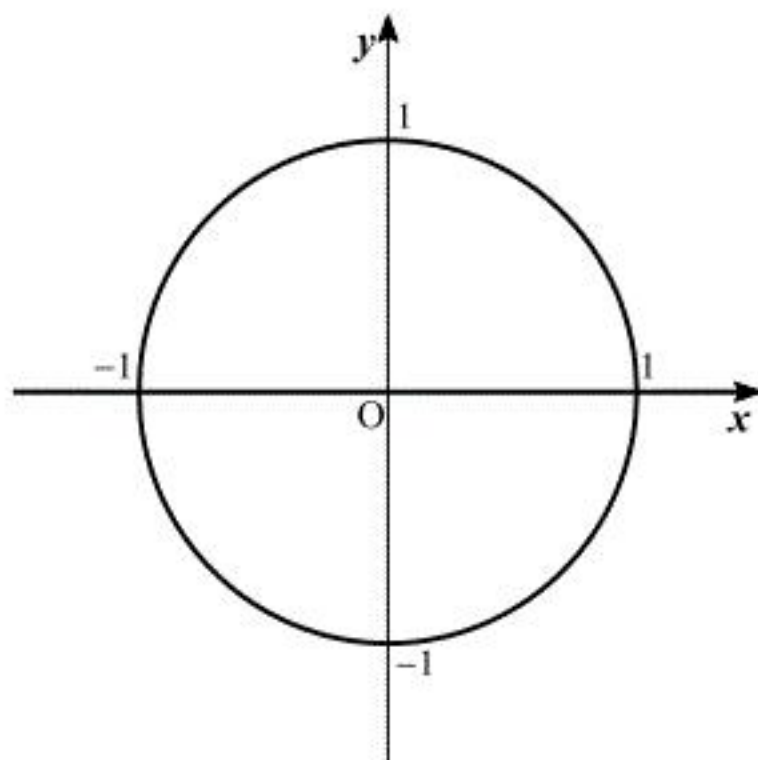
$\Leftrightarrow \sin \theta = 0$ または $r - \frac{1}{r} = 0$

$\Leftrightarrow \theta = 0, \pi$ または $r = 1$

$\Leftrightarrow (z \text{ が実数}) \text{ または } |z| = 1 \text{ (ただし } z = 0, -1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \text{ は除く)}$

となる。以上のことから、条件(*)を満たす点 z の全体が描く図形は半径1の円と実軸

となり、これを図示すると下図の太線部となる。



(1)

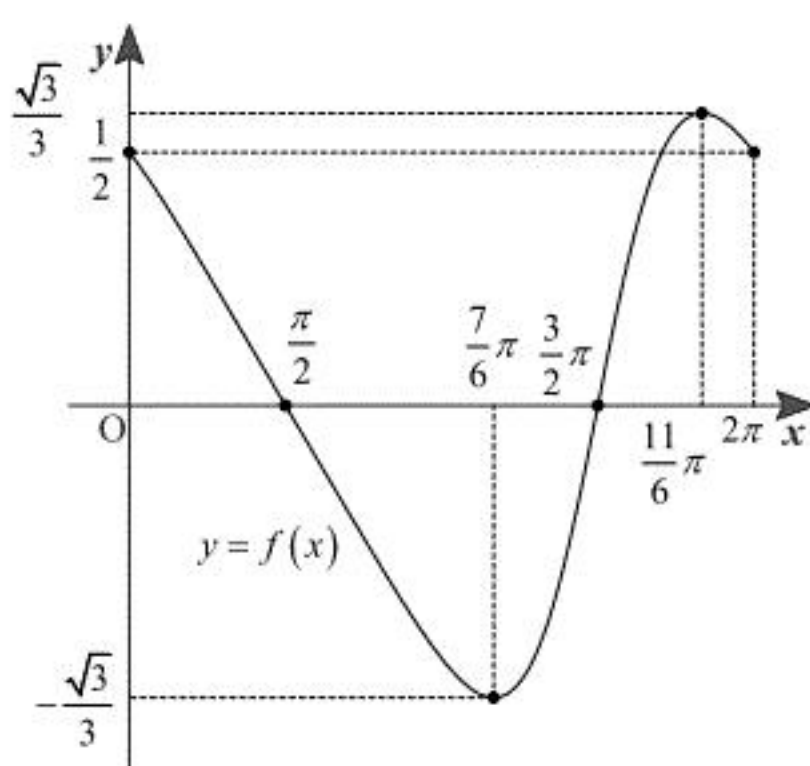
$2 + \sin x > 0$ に注意すると、 $f(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$ ($0 \leq x \leq 2\pi$)について、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\cos x)' \cdot (2 + \sin x) - \cos x \cdot (2 + \sin x)'}{(2 + \sin x)^2} \\ &= \frac{-\sin x \cdot (2 + \sin x) - \cos x \cdot \cos x}{(2 + \sin x)^2} \\ &= \frac{-2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)}{(2 + \sin x)^2} \quad (\because \sin^2 x + \cos^2 x = 1) \\ f''(x) &= -2 \cdot \frac{\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)' \cdot (2 + \sin x)^2 - \left(\sin x + \frac{1}{2}\right) \cdot \{(2 + \sin x)^2\}'}{\{(2 + \sin x)^2\}^2} \\ &= -2 \cdot \frac{\cos x \cdot (2 + \sin x)^2 - \left(\sin x + \frac{1}{2}\right) \cdot 2(2 + \sin x) \cos x}{(2 + \sin x)^4} \\ &= \frac{-2 \cos x (1 - \sin x)}{(2 + \sin x)^3} \end{aligned}$$

となるので、関数 $f(x)$ の増減表は下表のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{7}{6}\pi$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	$\frac{11}{6}\pi$	...	2π
$f'(x)$		-	-	-	0	+	+	+	0	-	
$f''(x)$		-	0	+	+	+	0	-	-	-	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

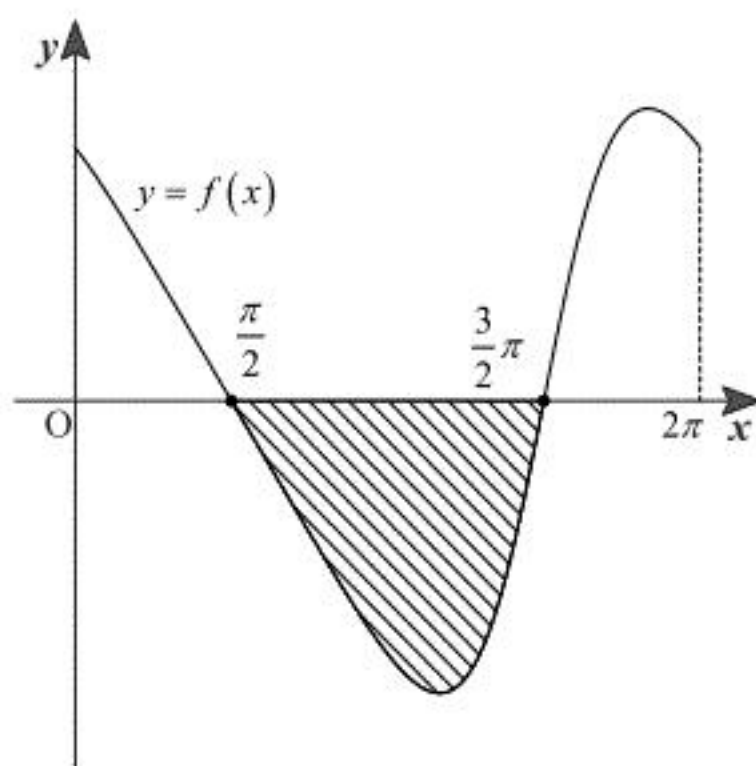
増減表より、 $y = f(x)$ のグラフは下図のようになる。



(答) 前図

(2)

(1)より、求める面積は下図の斜線部の面積となる。



ゆえに求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} -\frac{\cos x}{2 + \sin x} dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} -\frac{(2 + \sin x)'}{2 + \sin x} dx \\ &= \left[-\log(2 + \sin x) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \quad (\because 2 + \sin x > 0) \\ &= -\log 1 + \log 3 \\ &= \log 3 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\log 3$