

〔解答〕

(1)	1	2					
	1	1					
(2)	3	4	5	6	7	8	9
	-	1	1	5	4	9	5

〔解説〕

(1)

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{17} \text{ であるから,}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 17$$

$$\Leftrightarrow |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 17$$

$$\Leftrightarrow 34 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 5 = 17$$

$$\Leftrightarrow -2\vec{a} \cdot \vec{b} = -22$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 11$$

と求められる。

(2)

$$|\vec{a} + s\vec{b}|^2 \text{ を変形すると,}$$

$$|\vec{a} + s\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2s\vec{a} \cdot \vec{b} + s^2|\vec{b}|^2$$

$$= 5s^2 + 22s + 34$$

$$= 5\left(s + \frac{11}{5}\right)^2 + \frac{49}{5}$$

となる。 s は実数全体を動くから、 $|\vec{a} + s\vec{b}|^2$ は $s = -\frac{11}{5}$ のとき、最小値 $\frac{49}{5}$ をとることがわかる。

〔解答〕

(1)	10	11
	1	4
(2)	12	13
	1	4

〔解説〕

(1)

2個のサイコロを区別して考えると、2個のサイコロを振って出る目の組合せは、 $6^2 = 36$ 通りある。サイコロを1回振って+3だけ動くのは、2個のサイコロの目の和が8のときだから、考えられる目の組合せは、 $(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$ の5通りである。したがって、題意の確率は、

$$\frac{5}{36} = 0.1388\ldots$$

となるから、求める答は14%である。

(2)

(1)と同様に、サイコロを1回振って+1,+2だけ動く確率と、動かない確率を求める。

[1] +1だけ動く確率

2個のサイコロの目の和が2, 6, 10であればよいから、考えられる目の組合せは、 $(1, 1), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (4, 6), (5, 5), (6, 4)$ の9通りである。したがって、求める確率は、

$$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

である。

[2] +2だけ動く確率

2個のサイコロの目の和が4, 12であればよいから、考えられる目の組合せは、 $(1, 3), (2, 2), (3, 1), (6, 6)$ の4通りである。したがって、求める確率は、

$$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

である。

[3] 動かない確率

動点Pが動かない事象は、(1)及び(2)[1], (2)[2]の余事象だから、求める確率は、

$$1 - \left(\frac{5}{36} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \right) = \frac{1}{2}$$

である。

以上、[1], [2], [3]より、サイコロを3回振ったとき、Pが数直線上の4の位置にいるのは、

[i] +3だけ1回進み、+1だけ1回進み、残り1回は動かない場合

[ii] +2だけ1回進み、+1だけ2回進む場合

[iii] +2だけ2回進み、残り1回は動かない場合

の3つの場合があるから、題意の確率は、

$$\begin{aligned} & {}_3C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + {}_3C_1 \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^2 + {}_3C_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{9} \right)^2 \\ &= \frac{5}{48} + \frac{1}{48} + \frac{1}{54} \\ &= \frac{31}{216} = 0.143\ldots \end{aligned}$$

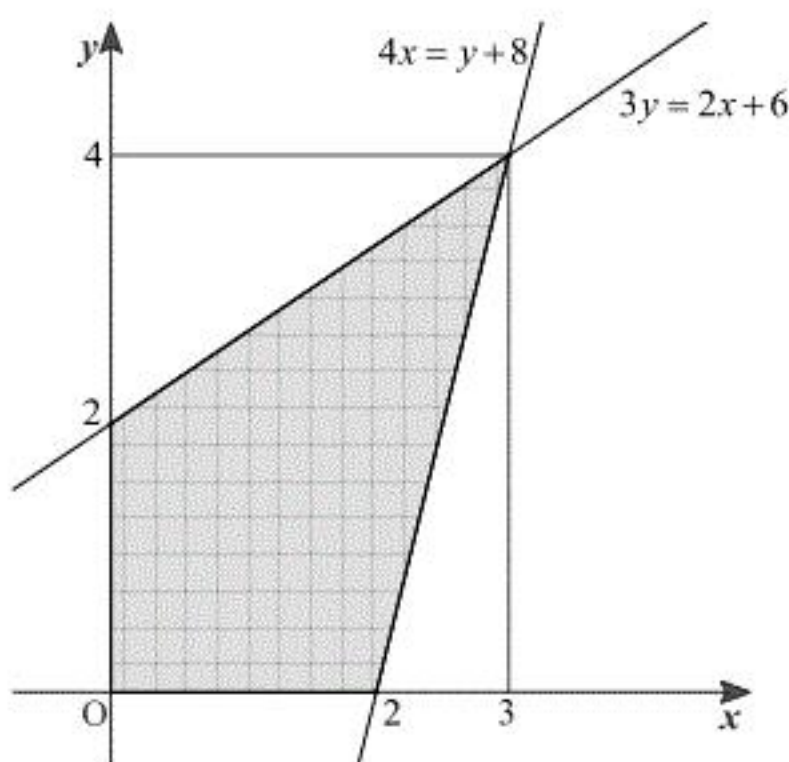
となるから、求める答は14%である。

(1)

底が $2 > 1$ であるから、与式について、 2 を底とする対数をとっても大小関係は変わらないから、 $x = \log_2 s$, $y = \log_2 t$ を利用して与式を変形すると、

$$\begin{cases} t^3 \leq 64s^2 \\ s^4 \leq 256t \\ s \geq 1 \\ t \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\log_2 t \leq \log_2 64 + 2\log_2 s \\ 4\log_2 s \leq \log_2 256 + \log_2 t \\ \log_2 s \geq \log_2 1 \\ \log_2 t \geq \log_2 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y \leq 2x + 6 \\ 4x \leq y + 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

となる。これを xy 平面上に図示すると、下図のようになる。ただし、境界を全て含む。

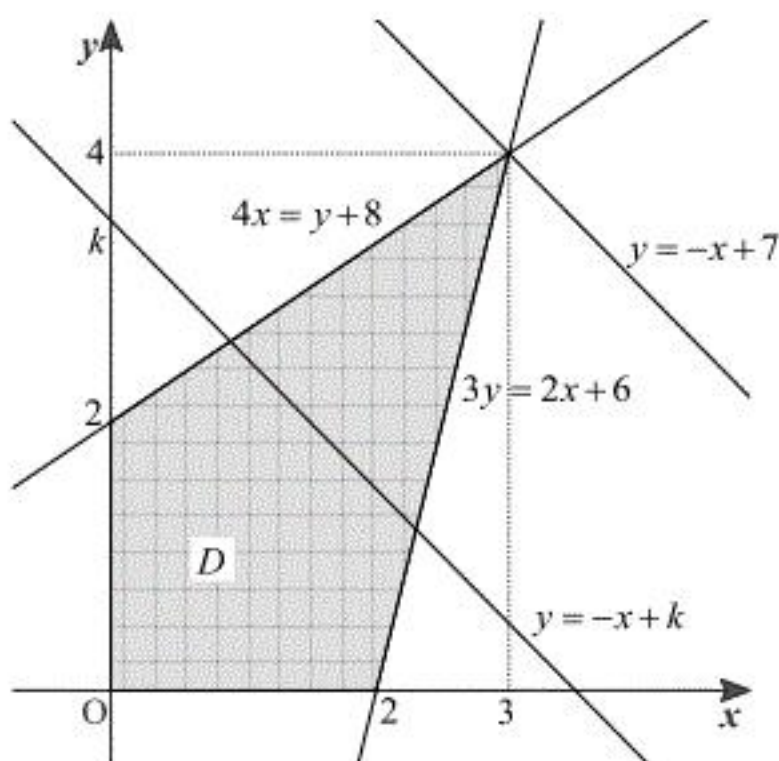


したがって、これが求める点 (x, y) の範囲である。

(答) 上図

(2)

(1)で求めた点 (x, y) の領域を D とする。 $st = 2^x \cdot 2^y = 2^{x+y}$ であることから、 $x+y$ の値が最大となるときの st の値も最大となる。以下、領域 D 内を動く点 (x, y) について、 $x+y$ のとりうる値の最大値を考える。 $x+y=k$ とおくと、これは傾き -1 、 y 切片 k の直線を表す。これが領域 D と共有点を持つような k の値の最大値を求めればよい。



上図より、 k の値は 2 直線の交点を通るとき最大になる。その交点の座標は、

$$\begin{cases} 4x = y + 8 \\ 3y = 2x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y - 8 = 0 \\ 2x - 3y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (3, 4)$$

である。よって、 $x+y$ は

$$x=3, y=4 \text{ のとき, 最大値 } 7$$

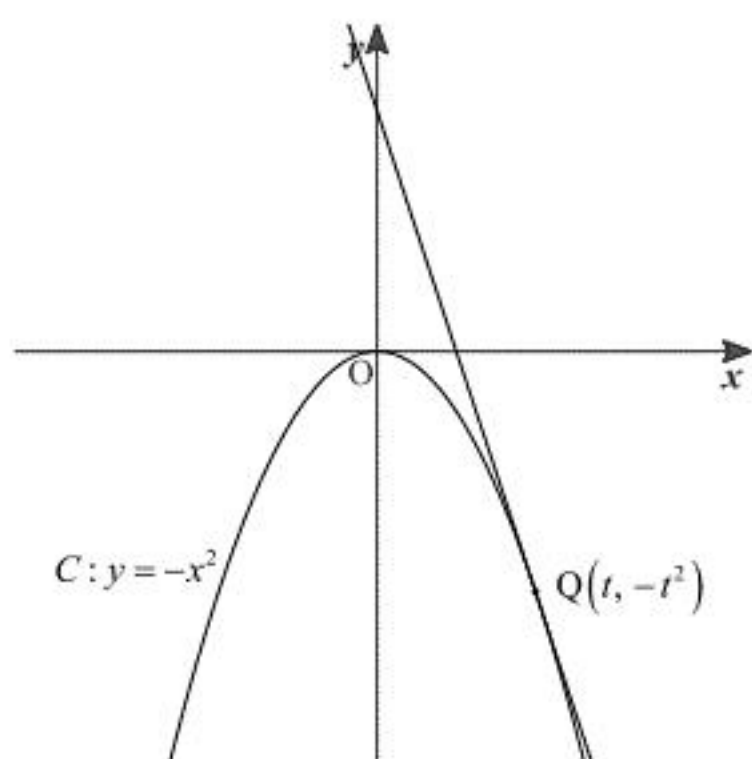
をとる。したがって、求める st の最大値は

$$2^7 = 128$$

である。

(答) 128

(1)

 $f(x) = -x^2$ とおく。点 $Q(t, -t^2)$ における接線の傾きは,

$$f'(t) = -2t$$

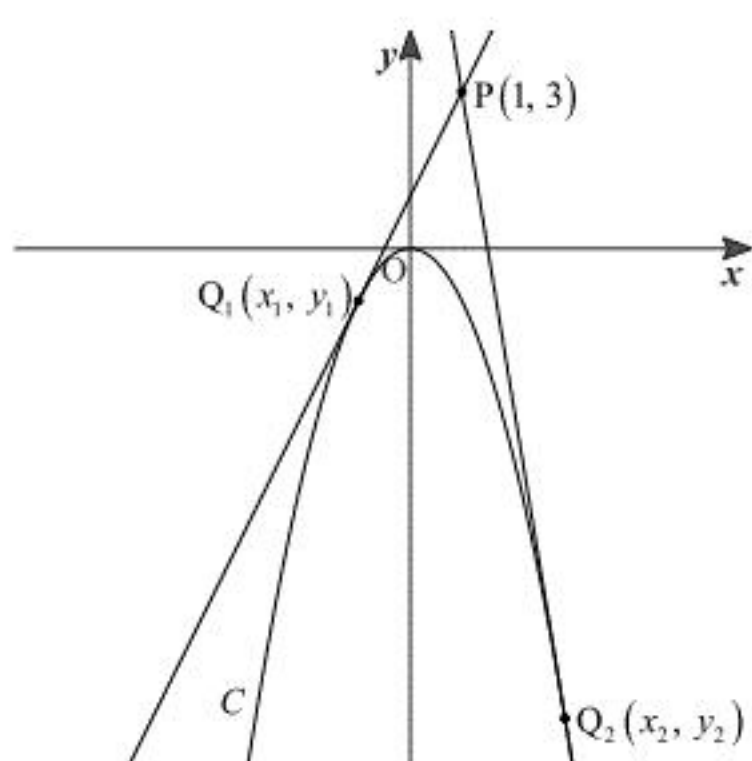
となるから, 求める接線の方程式は,

$$\begin{aligned} y - (-t^2) &= -2t(x - t) \\ \Leftrightarrow y &= -2tx + t^2 \end{aligned}$$

である。

(答) $y = -2tx + t^2$

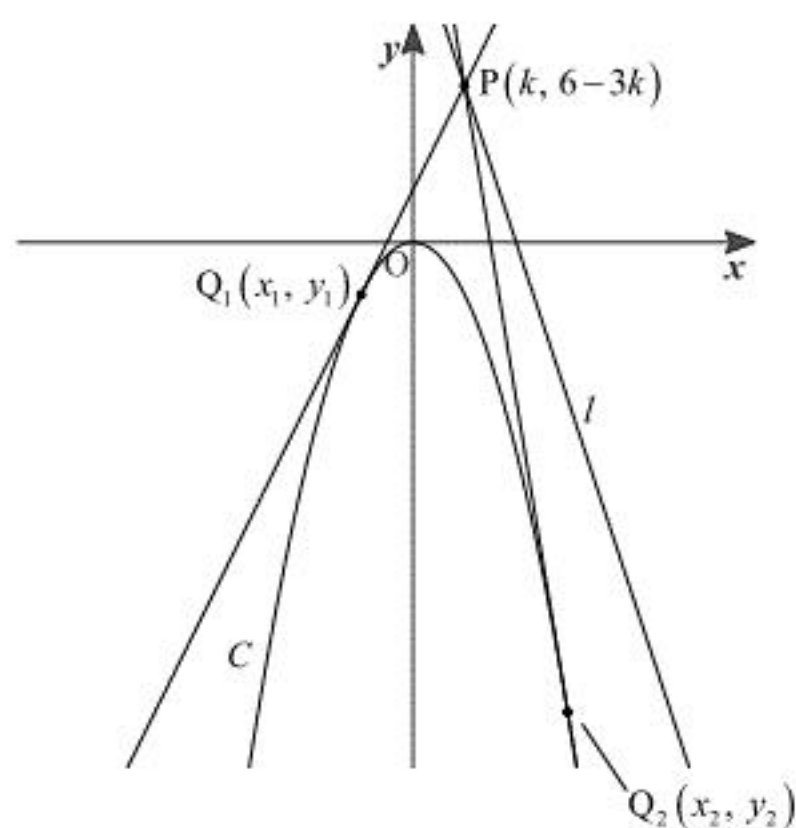
(2)

曲線 $C: y = -x^2$ 上の点 $Q(t, -t^2)$ における接線の方程式は, (1)より $y = -2tx + t^2$ であり, これが点 $P(1, 3)$ を通ることから,

$$\begin{aligned} 3 &= -2t \cdot 1 + t^2 \\ \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t+1)(t-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= -1, 3 \end{aligned}$$

と求められる。 $x_1 < x_2$ であるから, 求める接点 Q_1, Q_2 の座標は, $Q_1(-1, -1), Q_2(3, -9)$ となる。(答) $Q_1(-1, -1), Q_2(3, -9)$

(3)

実数 k を用いると, 点 P の座標は $(k, 6-3k)$ と表せる。曲線 $C: y = -x^2$ 上の点 $(t, -t^2)$ における接線の方程式 $y = -2tx + t^2$ が, 点 $P(k, 6-3k)$ を通るとき,

$$\begin{aligned} 6-3k &= -2t \cdot k + t^2 \\ \Leftrightarrow t^2 - 2k \cdot t + 3k - 6 &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。 $\textcircled{1}$ の方程式の解が x_1, x_2 であるから, $\textcircled{1}$ において解と係数の関係より

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2k \\ x_1 x_2 = 3k - 6 \end{cases}$$

が成り立つ。 よって,

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 \\ &= 4k^2 - 4(3k - 6) \\ &= 4(k^2 - 3k + 6) \end{aligned}$$

である。 $x_1 < x_2$ より $x_2 - x_1 > 0$ であることに注意して, $x_2 - x_1$ の値を k を用いて表すと,

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= 2\sqrt{k^2 - 3k + 6} \\ &= 2\sqrt{\left(k - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}} \end{aligned}$$

となる。 k はすべての実数値を取るから, $x_2 - x_1$ の最小値は, $k = \frac{3}{2}$ のとき,

$$2\sqrt{\frac{15}{4}} = \sqrt{15}$$

と求められる。

(答) $\sqrt{15}$