

【解答】

(1)	①	②
	5	0
(2)	③	④
	1	5
(3)	⑤	⑥
	3	2

【解説】

どの球も袋から同様に確からしく取り出されるものとする。まず、ちょうど n 回の操作で袋が空になるとき、1回目から $(n-1)$ 回目までの操作のいずれかにおいて必ず番号が1である白球を取り出し、 n 回目の操作において番号が1である赤球を取り出すことに注意する。また、各番号の球を取り出す回数は、高々2回である。

(1)

先の議論より、3回目までに番号が1である白球を1回、番号が2である球を2回取り出し、4回目に番号が1である赤球を取り出す場合を考える。このような取り出し方は、

白1 → 白2 → 赤2 → 赤1

白2 → 白1 → 赤2 → 赤1

白2 → 赤2 → 白1 → 赤1

の3通りであり、袋の中身はそれぞれ、

(白1, 白2) → (赤1, 白2) → (赤1, 赤2) → (赤1) → (空)

(白1, 白2) → (白1, 赤2) → (赤1, 赤2) → (赤1) → (空)

(白1, 白2) → (白1, 赤2) → (白1) → (赤1) → (空)

と推移する。したがって、求める確率は、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

より、50%である。

(2)

(1)と同様にして、2回目までに番号が1である白球を1回、番号が2または3である白球を1回取り出し、3回目に番号が1である赤球を取り出す場合を考える。ここで、番号が2である白球を引く場合の確率と、番号が3である白球を引く場合の確率は等しいため、番号が2である白球を引く場合のみを考える。このような取り出し方は、

白1 → 白2 → 赤1

白2 → 白1 → 赤1

の2通りであり、袋の中身はそれぞれ、

(白1, 白2, 白3) → (赤1, 白2, 白3) → (赤1, 赤2, 白3) → (空)

(白1, 白2, 白3) → (白1, 赤2, 白3) → (赤1, 赤2, 白3) → (空)

と推移する。したがって、題意の確率は、

$$\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) \cdot 2 = \frac{4}{27}$$

であり、パーセント表示をして小数点以下を四捨五入すると、15%となる。

(3)

(2)と同様にして、3回目までに番号が1である白球を1回、番号が2または3である球を2回取り出し、4回目に番号が1である赤球を取り出す場合を考える。以下では、番号が2または3である球をそれぞれ何回取り出すかに応じて場合分けをする。

[1] 番号が2である球を2回取り出すとき

このような取り出し方は、

白1 → 白2 → 赤2 → 赤1

白2 → 白1 → 赤2 → 赤1

白2 → 赤2 → 白1 → 赤1

の3通りであり、袋の中身はそれぞれ、

(白1, 白2, 白3) → (赤1, 白2, 白3) → (赤1, 赤2, 白3) → (赤1) → (空)

(白1, 白2, 白3) → (白1, 赤2, 白3) → (赤1, 赤2, 白3) → (赤1) → (空)

(白1, 白2, 白3) → (白1, 赤2, 白3) → (白1) → (赤1) → (空)

と推移する。したがって、この場合が起こる確率は、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{27}$$

である。

[2] 番号が2である白球と番号が3である白球をそれぞれ1回取り出すとき

このとき、3回目までの操作ですべての番号の白球を取り出すため、3回の操作が終わった時点で袋に入っているのは3つの赤球となる。ここで、3回目までの白球の取り出し方は3!通りであり、いずれの取り出し方でも4回目に番号が1である赤球を取り出す確率は等しいため、白玉を番号の小さい順に取り出す場合のみを考える。このような取り出し方をするとき、袋の中身は、

(白1, 白2, 白3) → (赤1, 白2, 白3) → (赤1, 赤2, 白3)

→ (赤1, 赤2, 赤3) → (空)

と推移する。したがって、番号2と番号3の白球をそれぞれ1回取り出し、ちょうど4回の操作で袋が空になる確率は、

$$\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) \cdot 3! = \frac{2}{27}$$

である。

[3] 番号が3である球を2回取り出すとき

このような取り出し方は、

白1 → 白3 → 赤3 → 赤1

白3 → 白1 → 赤3 → 赤1

白3 → 赤3 → 白1 → 赤1

の3通りであり、袋の中身はそれぞれ、

(白1, 白2, 白3) → (赤1, 白2, 白3) → (赤1, 白2, 赤3) → (赤1, 白2) → (空)

(白1, 白2, 白3) → (白1, 白2, 赤3) → (赤1, 白2, 赤3) → (赤1, 白2) → (空)

(白1, 白2, 白3) → (白1, 白2, 赤3) → (白1, 白2) → (赤1, 白2) → (空)

と推移する。したがって、この場合が起こる確率は、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{108}$$

である。

以上, [1], [2], [3]より、求める確率は、

$$\frac{5}{27} + \frac{2}{27} + \frac{7}{108} = \frac{35}{108}$$

であり、パーセント表示をして小数点以下を四捨五入すると、32%となる。

【解答】

(1)	7	8	9	10	11	12	13
	3	0	6	9	5	1	2
(2)	14	15	16				
	3	3	2				
(3)	17						
	6						

【解説】

(1)

数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

であるから、 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \right\} \\ &= 3 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 6 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} \end{aligned}$$

と表すことができる。よって、

$$\begin{aligned} S_{10} &= 6 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \right\} \\ &= \frac{6 \cdot 1023}{1024} \\ &= \frac{3069}{512} \end{aligned}$$

である。

(2)

 b_n を変形すると

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{a_n}} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{n-1}} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (-\sqrt{2})^{n-1} \end{aligned}$$

となるため、数列 $\{b_n\}$ は初項が $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 、公比が $-\sqrt{2}$ の等比数列になる。

(3)

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n b_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (-\sqrt{2})^{k-1} \right\} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1 - (-\sqrt{2})^n}{1 - (-\sqrt{2})} \\ &= \frac{-\sqrt{3} \{1 - (-\sqrt{2})^n\}}{3(1 + \sqrt{2})} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} T_n &\geq 1 \\ \Leftrightarrow \frac{-\sqrt{3} \{1 - (-\sqrt{2})^n\}}{3(1 + \sqrt{2})} &\geq 1 \\ \Leftrightarrow -\sqrt{3} \{1 - (-\sqrt{2})^n\} &\geq 3(1 + \sqrt{2}) \\ \Leftrightarrow 1 - (-\sqrt{2})^n &\leq -\sqrt{3}(1 + \sqrt{2}) \\ \Leftrightarrow (-\sqrt{2})^n &\geq 1 + \sqrt{3} + \sqrt{6} \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

と変形できる。よって、①の不等式を満たす最小の自然数 n を求めればよい。ここで $1 + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ について、

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{1} + \sqrt{4} &< 1 + \sqrt{3} + \sqrt{6} < 1 + \sqrt{4} + \sqrt{9} \\ \Leftrightarrow 4 &< 1 + \sqrt{3} + \sqrt{6} < 6 \end{aligned}$$

が成立する。また、 $(-\sqrt{2})^n$ について $n=1$ から順に代入すると以下のようなになる。

n	1	2	3	4	5	6
$(-\sqrt{2})^n$	$-\sqrt{2}$	2	$-2\sqrt{2}$	4	$-4\sqrt{2}$	8

以上より、①をみたす最小の n は 6 であり、これが求める値である。

(1)

点Pの座標を (X, Y) とする。 $a=1$ のとき、

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = X + 3Y$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = 2X - Y$$

であるから、与えられた連立不等式は

$$\begin{cases} 0 \leq \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} \leq 1 \\ 0 \leq \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq X + 3Y \leq 1 \\ 0 \leq 2X - Y \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -X \leq 3Y \leq -X + 1 \\ -2X \leq -Y \leq -2X + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3}X \leq Y \leq -\frac{1}{3}X + \frac{1}{3} \\ 2X - 1 \leq Y \leq 2X \end{cases}$$

と変形できる。2つの直線の式 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ と $y = 2x$ を連立すると

$$-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = 2x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{7}$$

であり、これを $y = 2x$ に代入すると、

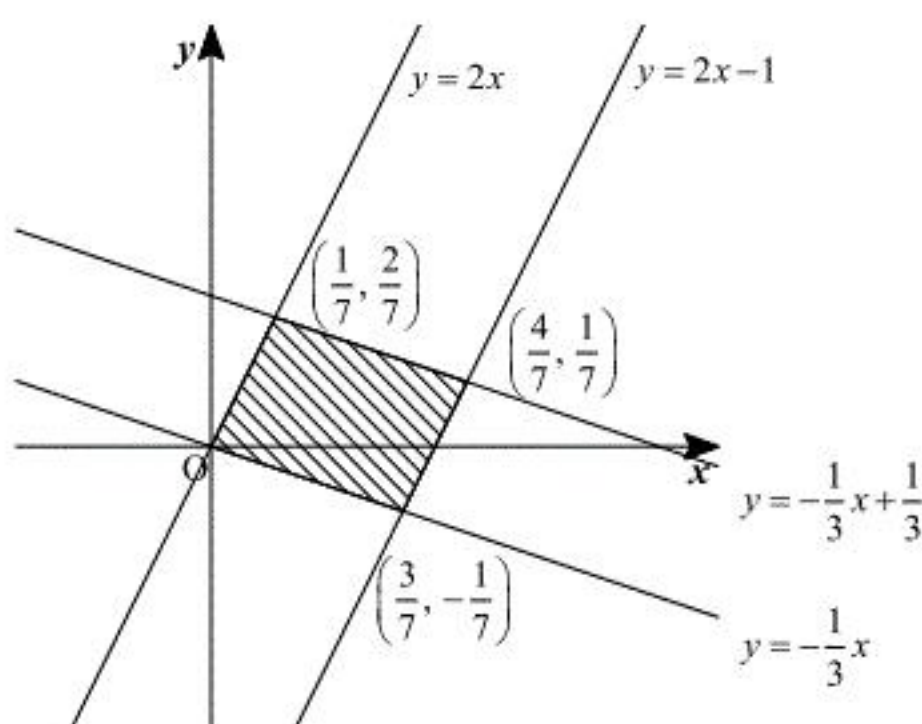
$$y = \frac{2}{7}$$

が得られるから、この2直線の交点の座標は $\left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right)$ である。同様に直線 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ と直線

$y = 2x - 1$ の交点の座標は $\left(\frac{4}{7}, \frac{1}{7}\right)$ であり、直線 $y = -\frac{1}{3}x$ と直線 $y = 2x - 1$ の交点の座標は

$\left(\frac{3}{7}, -\frac{1}{7}\right)$ である。以上より、与えられた連立不等式を満たす座標平面上の点P全体のつくる

図形Fは以下の図の斜線部分である。ただし、境界を含む。



(答) 前図

(2)

点Pの座標を (X, Y) とすると、

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = aX + \frac{3}{a}Y$$

であるから、 $a > 0$ に注意すると

$$0 \leq \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq aX + \frac{3}{a}Y \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -aX \leq \frac{3}{a}Y \leq -aX + 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{a^2}{3}X \leq Y \leq -\frac{a^2}{3}X + \frac{a}{3}$$

と変形される。これと(1)の途中式より、与えられた連立不等式は

$$\begin{cases} 0 \leq \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} \leq 1 \\ 0 \leq \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{a^2}{3}X \leq Y \leq -\frac{a^2}{3}X + \frac{a}{3} \\ 2X - 1 \leq Y \leq 2X \end{cases}$$

と表される。ここで、直線 $y = -\frac{a^2}{3}x + \frac{a}{3}$ と直線 $y = 2x$ の交点をCとする。与えられた連立不

等式を満たす点P全体の作る図形Fは、(1)と同様に平行四辺形となるから、平行四辺形の底

辺をOCと考えるとその高さdは直線 $y = 2x - 1$ と直線 $y = 2x$ の距離に等しくなる。ここで、

$y = 2x - 1$ と $y = 2x$ の距離は原点と $y = 2x - 1$ の距離に等しいので、点と直線の距離の公式より、

$$d = \frac{|2 \cdot 0 - 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

である。また、 $y = -\frac{a^2}{3}x + \frac{a}{3}$ と $y = 2x$ を連立すると

$$-\frac{a^2}{3}x + \frac{a}{3} = 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + 6}{3}x = \frac{a}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a}{a^2 + 6} \quad (\because a^2 + 6 > 0)$$

であり、これを $y = 2x$ に代入すると

$$y = \frac{2a}{a^2 + 6}$$

と求まるから、 $C\left(\frac{a}{a^2 + 6}, \frac{2a}{a^2 + 6}\right)$ である。したがって、

$$OC = \sqrt{\left(\frac{a}{a^2 + 6}\right)^2 + \left(\frac{2a}{a^2 + 6}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}a}{a^2 + 6} \quad (\because a > 0, a^2 + 6 > 0)$$

であるので、

$$S = OC \cdot d = \frac{a}{a^2 + 6}$$

である。 S を a について微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dS}{da} &= \frac{(a^2 + 6) - a \cdot 2a}{(a^2 + 6)^2} \\ &= -\frac{(a + \sqrt{6})(a - \sqrt{6})}{(a^2 + 6)^2} \end{aligned}$$

であるから、増減表は以下のようになる。

a	(0)	...	$\sqrt{6}$	...
$\frac{dS}{da}$		+	0	-
S		$\nearrow$	最大	$\searrow$

これより $a = \sqrt{6}$ のとき S は最大となりその値は

$$S = \frac{\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2 + 6} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

と求まる。

(答) $\frac{\sqrt{6}}{12}$

(1)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (-1) \cdot e^{-2x} + (1-x) \cdot (-2)e^{-2x} \\
 &= (2x-3)e^{-2x} \\
 f''(x) &= 2 \cdot e^{-2x} + (2x-3) \cdot (-2)e^{-2x} \\
 &= (8-4x)e^{-2x}
 \end{aligned}$$

である。これより、 $f(x)$ の増減表は下のようになる。

x	...	$\frac{3}{2}$	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	+	+
$f''(x)$	+	+	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$f(2)$	$\nearrow$

また、

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(1 - \frac{3}{2}\right)e^{-2 \cdot \frac{3}{2}} = -\frac{e^{-3}}{2}$$

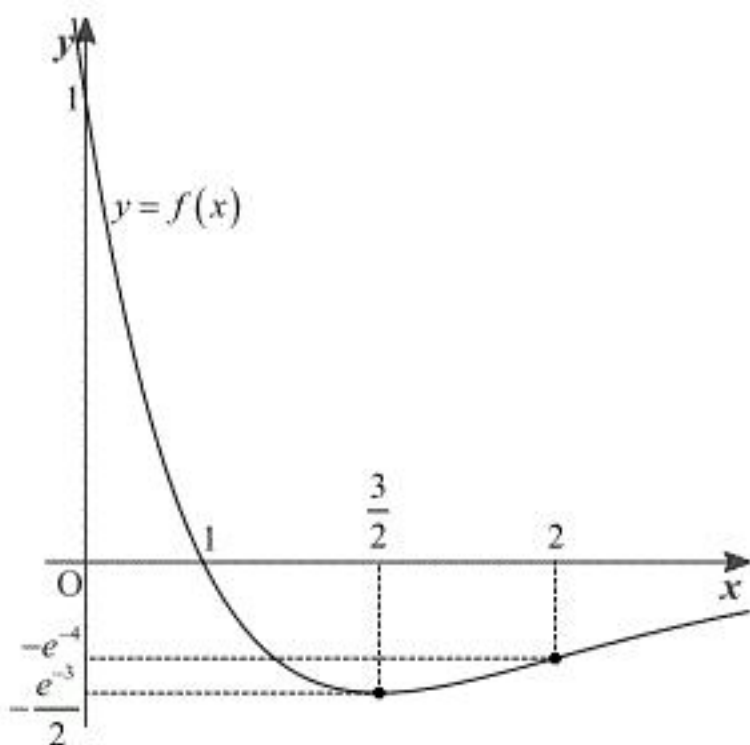
$$f(2) = (1-2)e^{-2 \cdot 2} = -e^{-4}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-2x} - xe^{-2x}) \\
 &= 0 \left(\because \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-2x} = 0 \right)
 \end{aligned}$$

であり、 $p = -x$ とおくと、

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{p \rightarrow -\infty} (1+p)e^{2p} \\
 &= \infty
 \end{aligned}$$

である。以上より、 $y = f(x)$ のグラフの概形は次のようになる。



(答) 前図

(2)

$y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の式は

$$\begin{aligned}
 y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\
 \therefore y &= (2t-3)e^{-2t}x - (2t^2-2t-1)e^{-2t}
 \end{aligned}$$

である。これが原点 $(0, 0)$ を通るので

$$\begin{aligned}
 (2t^2-2t-1)e^{-2t} &= 0 \\
 \Leftrightarrow 2t^2-2t-1 &= 0 \left(\because e^{-2t} \neq 0 \right) \\
 \Leftrightarrow t &= \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

となる。したがって、接点の x 座標は $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ である。

(答) $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

(1)

部分積分法を用いると、

$$\begin{aligned}\int \log t dt &= \int (t)' \log t dt \\ &= t \log t - \int t \cdot (\log t)' dt \\ &= t \log t - \int 1 dt \\ &= t \log t - t + C\end{aligned}$$

となる。ただし、 C は積分定数である。

(答) $t \log t - t + C$ (C は積分定数)

(2)

(1)より、 $g(t) = t \log t - t$ とおくと、

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_x^{\sqrt{x}} \log t dt \\ &= g(\sqrt{x}) - g(x)\end{aligned}$$

を満たす。 $g(t)$ は $\log t$ の原始関数であり $g'(t) = \log t$ が成立するから、合成関数の微分法を用いて、

$$\begin{aligned}f'(x) &= g'(\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x})' - g'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \log x^{\frac{1}{2}} - \log x \\ &= \left(\frac{1}{4\sqrt{x}} - 1 \right) \log x\end{aligned}$$

を得る。

(答) $\left(\frac{1}{4\sqrt{x}} - 1 \right) \log x$

(3)

(2)より、

$$f'(x) = \left(\frac{1}{4} - \sqrt{x} \right) \frac{1}{\sqrt{x}} \log x$$

となる。 $0 < x < 1$ において、 $\frac{1}{\sqrt{x}} \log x < 0$ であることに注意すると、 $f(x)$ の増減表は下のとおりである。

x	0	...	$\frac{1}{16}$	...	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって、 $x = \frac{1}{16}$ で最小値

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{16}\right) &= g\left(\sqrt{\frac{1}{16}}\right) - g\left(\frac{1}{16}\right) \\ &= g\left(\frac{1}{4}\right) - g\left(\frac{1}{16}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{1}{16} \log \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \right) \\ &= \left(-\frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{4} \right) - \left(-\frac{1}{4} \log 2 - \frac{1}{16} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \log 2 - \frac{3}{16}\end{aligned}$$

をとる。

(答) $x = \frac{1}{16}$ のとき、最小値 $-\frac{1}{4} \log 2 - \frac{3}{16}$