

【解答】

(1)	1	2	3	4	5	6
	1	3	0	9	4	6
(2)	7	8	9	10	11	
	4	1	1	1	2	
(3)	12	13	14	15		
	3	2	2	3		

【解説】

(1)

17で割ると11余り、12で割ると10余る正の整数を N とすると、 N は正の整数 x, y を用いて

$$\begin{cases} N=17x+11 \\ N=12y+10 \end{cases}$$

と表せる。このとき

$$\begin{aligned} 17x+11 &= 12y+10 \\ \Leftrightarrow 12y-17x &= 1 \end{aligned}$$

であり、このような (x, y) の組として

$$(x, y) = (7, 10)$$

がある。よって、12と17は互いに素であることから N は0以上の整数 k を用いて

$$\begin{aligned} N &= 17 \cdot 7 + 11 + 17 \cdot 12k \\ &= 130 + 204k \end{aligned}$$

と表せる。したがって、17で割ると11余り、12で割ると10余る3桁の正の整数のうち、最小のものは130、最大のものは946である。

(2)

$$\begin{aligned} \cos 4\theta &= \sin 2\theta + 1 \\ \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 2\theta &= \sin 2\theta + 1 \\ \Leftrightarrow \sin 2\theta (\sin 2\theta + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin 2\theta = 0, -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq \theta < \pi$ より方程式の解は $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi$ の4個であり、その中で最大のもの

は $\frac{11}{12}\pi$ である。

(3)

$y=3^x$ のグラフを x 軸方向に2、 y 軸方向に $\frac{1}{2}$ だけ平行移動したグラフの方程式は

$$\begin{aligned} y - \frac{1}{2} &= 3^{x-2} \\ \Leftrightarrow y &= 3^{x-2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。また、 $y=3^x$ のグラフを y 軸に関して対称移動したグラフの方程式は

$$y = 3^{-x}$$

である。よって、2つのグラフの共有点の座標は、2つの方程式を連立して

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y = 3^{x-2} + \frac{1}{2} \\ y = 3^{-x} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 3^{-x} = 3^{x-2} + \frac{1}{2} \\ y = 3^{-x} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \frac{1}{9}(3^x)^2 + \frac{1}{2} \cdot 3^x - 1 = 0 \quad (\because 3^x > 0) \\ y = 3^{-x} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} (2 \cdot 3^x - 3)(3^x + 6) = 0 \\ y = 3^{-x} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 3^x = \frac{3}{2} \quad (\because 3^x > 0) \\ y = 3^{-x} \end{cases} \\ \therefore &(x, y) = \left(\log_3 \frac{3}{2}, \frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

である。

(1)

$$\begin{aligned}
 |\overrightarrow{AB}|^2 &= |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2 \\
 &= |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\
 &= 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 1 \\
 &= 11
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\overrightarrow{AC}|^2 &= |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}|^2 \\
 &= |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} \\
 &= 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \\
 &= 16
 \end{aligned}$$

である。よって、 $|\overrightarrow{AB}| \geq 0$, $|\overrightarrow{AC}| \geq 0$ より

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2} = \sqrt{11}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{|\overrightarrow{AC}|^2} = 4$$

となる。

$$(\text{答}) \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{11}, |\overrightarrow{AC}| = 4$$

(2)

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$ を変形することにより、

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 6 \\
 \Leftrightarrow (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) &= 6 \\
 \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + |\overrightarrow{OA}|^2 - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} &= 6 \\
 \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + 2^2 - 1 - 2 &= 6 \\
 \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} &= 5
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 5$$

(3)

$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ は1次独立である。ここで、点Hは平面OAB上にあるから、 s, t を実数とすると

$$\overrightarrow{OH} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

と表せる。また、 $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{OB}$ より

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OA} &= 0 \\
 \Leftrightarrow (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OA} &= 0 \\
 \Leftrightarrow (s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OA} &= 0 \\
 \Leftrightarrow s|\overrightarrow{OA}|^2 + t\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} &= 0 \\
 \Leftrightarrow 4s + t - 2 &= 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OB} &= 0 \\
 \Leftrightarrow (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OB} &= 0 \\
 \Leftrightarrow (s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OB} &= 0 \\
 \Leftrightarrow s\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + t|\overrightarrow{OB}|^2 - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} &= 0 \\
 \Leftrightarrow s + 9t - 5 &= 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

となる。よって、 $\textcircled{1} \times 9 - \textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned}
 35s - 13 &= 0 \\
 \Leftrightarrow s &= \frac{13}{35}
 \end{aligned}$$

となり、 $-\textcircled{1} + \textcircled{2} \times 4$ より

$$\begin{aligned}
 35t - 18 &= 0 \\
 \Leftrightarrow t &= \frac{18}{35}
 \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\overrightarrow{OH} = \frac{13}{35}\overrightarrow{OA} + \frac{18}{35}\overrightarrow{OB}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OH} = \frac{13}{35}\overrightarrow{OA} + \frac{18}{35}\overrightarrow{OB}$$

(1)

$x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = (x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$ より、以下のように場合分けできる。

$$[1] \quad (x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}, 2 \leq x \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^2 - \frac{3}{2}x - 1\right) - \frac{5}{2}x + 1 \\ &= x^2 - 4x \\ &= x(x-4) \\ &= (x-2)^2 - 4 \end{aligned}$$

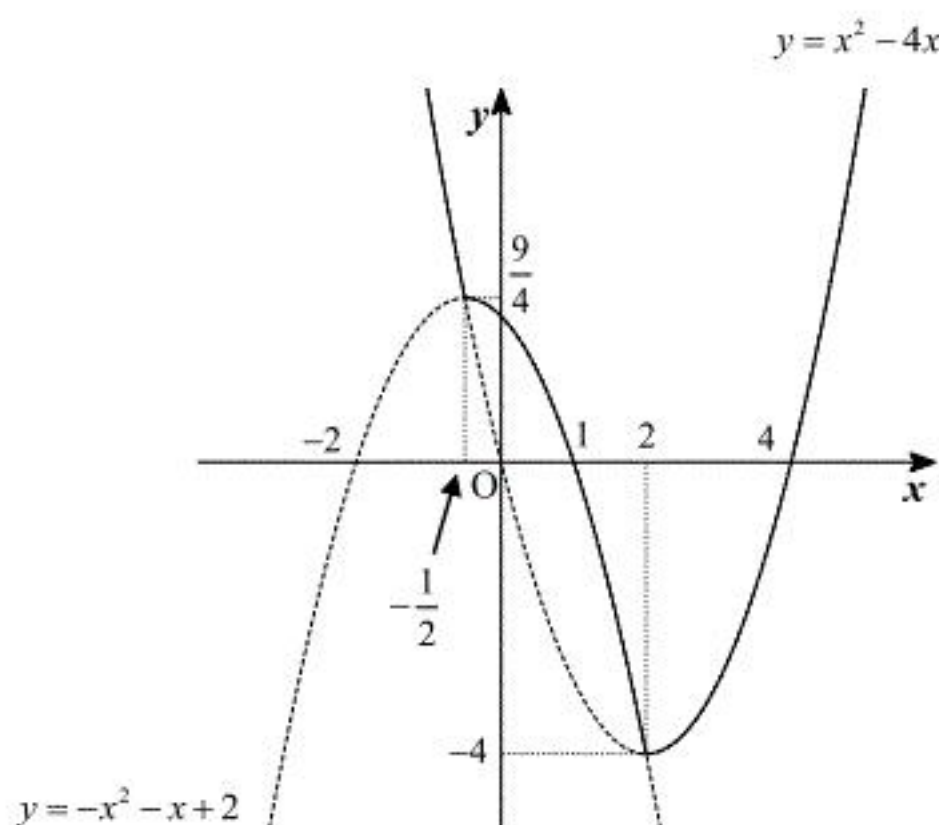
と変形できることから、頂点が $(2, -4)$ で下に凸の放物線の一部となる。

$$[2] \quad (x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 2 \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= -\left(x^2 - \frac{3}{2}x - 1\right) - \frac{5}{2}x + 1 \\ &= -x^2 - x + 2 \\ &= -(x-1)(x+2) \\ &= -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \end{aligned}$$

と変形できることから、頂点が $\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$ で上に凸の放物線の一部となる。

以上, [1], [2]より, $y = f(x)$ のグラフの概形は下図の実線部のようになる。



(答) 前図

(2)

$F(x) = \int_0^x f(t) dt$ より $F'(x) = f(x)$ である。したがって, (1)のグラフより $0 \leq x \leq 4$ における $F(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	1	...	4
$F'(x)$		+	0	-	
$F(x)$	0	↗	$F(1)$	↘	$F(4)$

ここで,

$$\begin{aligned} F(1) &= \int_0^1 f(t) dt \\ &= \int_0^1 (-t^2 - t + 2) dt \\ &= \left[-\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2t \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \\ &= \frac{7}{6} \\ F(4) &= \int_0^4 f(t) dt \\ &= \int_0^2 (-t^2 - t + 2) dt + \int_2^4 (t^2 - 4t) dt \\ &= \left[-\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2t \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 \right]_2^4 \\ &= \left(-\frac{8}{3} - 2 + 4 \right) + \frac{1}{3}(64 - 8) - 2(16 - 4) \\ &= -6 \end{aligned}$$

である。よって, 増減表より $F(x)$ は $x=1$ のとき最大値 $\frac{7}{6}$, $x=4$ のとき最小値 -6 をとる。

(答) 最大値: $\frac{7}{6}$, 最小値: -6