

1

【解答】

(1)	1	2	3									
	8	3	4									
(2)	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	－	7	2	0	－	7	2	－	2	1	5	2

【解説】

(1)

45^{50} について、常用対数をとると、

$$\begin{aligned}
 \log_{10} 45^{50} &= 50 \cdot \log_{10} 45 \\
 &= 50 \cdot \log_{10} (3^2 \cdot 5) \\
 &= 50 \cdot \left(2 \log 3 + \log_{10} \frac{10}{2} \right) \\
 &= 50 \cdot (2 \log 3 + 1 - \log_{10} 2) \\
 &= 50 \cdot (2 \cdot 0.4771 + 1 - 0.3010) \\
 &= 50 \cdot 1.6532 \\
 &= 82.66
 \end{aligned}$$

となる。

$$\log_{10} 4 = 2 \log_{10} 2 = 0.6020$$

$$\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = 0.6990$$

より、

$$82 + \log_{10} 4 \leq \log_{10} 45^{50} < 82 + \log_{10} 5$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 10^{82} \leq 45^{50} < 5 \cdot 10^{82}$$

が成り立つため、 45^{50} は 83 桁の数で、最高位の数字は 4 である。

(2)

$$2x^3 + 2x^2 - 12x - k = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 12x = k$$

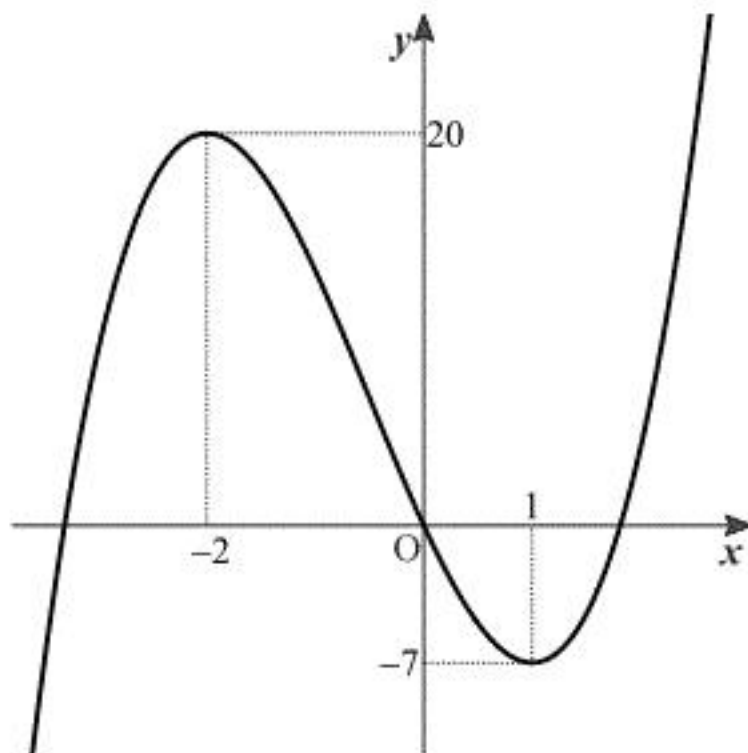
であるから、3 次方程式 $2x^3 + 2x^2 - 12x - k = 0$ の解の個数は、曲線 $y = 2x^3 + 2x^2 - 12x$ と直線 $y = k$ の共有点の個数に等しい。ここで、 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ とおくと、

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 6x^2 + 6x - 12 \\
 &= 6(x+2)(x-1)
 \end{aligned}$$

であるから、増減表は以下のようになる。

x	...	-2	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		↗	極大	↘	極小

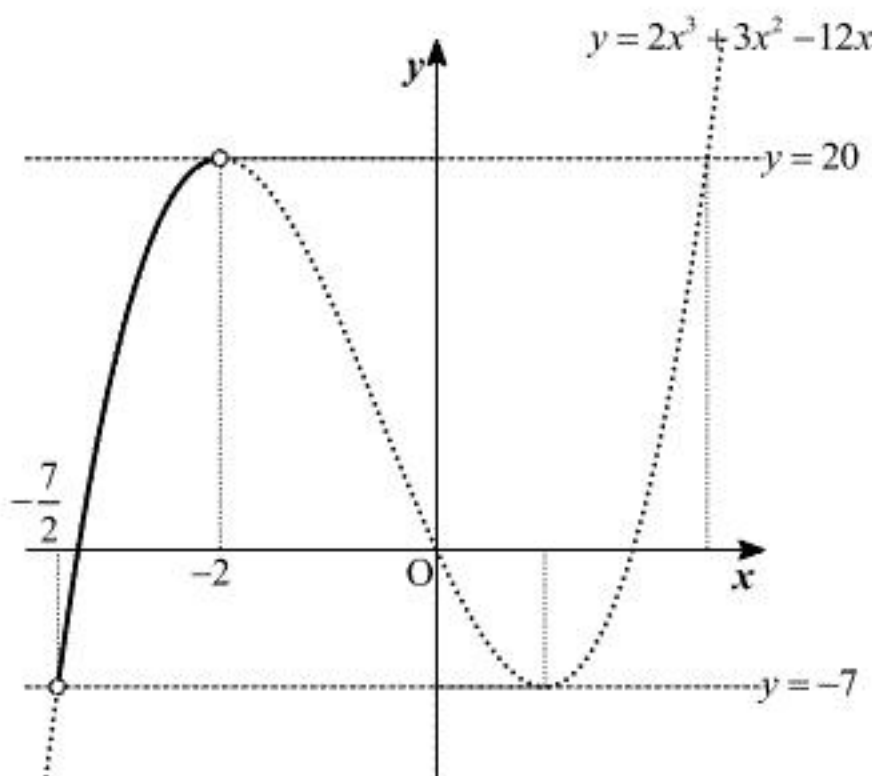
ただし、 $f(-2) = 20$ 、 $f(1) = -7$ である。したがって、 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ のグラフは以下のようになる。



このグラフと直線 $y = k$ の共有点が 3 つとなるのは、 $-7 < k < 20$ のときである。したがって、3 次方程式 $2x^3 + 2x^2 - 12x - k = 0$ が異なる 3 個の実数解をもつときの k のとりうる値の範囲は、 $-7 < k < 20$ である。次に、 k がこの範囲にあるときの α, γ のとりうる値について調べる。まず、 α は 3 次方程式 $2x^3 + 2x^2 - 12x - k = 0$ の最小の解であるため、 α は曲線 $y = 2x^3 + 2x^2 - 12x$ と直線 $y = k$ の 3 つの共有点の x 座標の中で、最小となるものである。曲線 $y = 2x^3 + 2x^2 - 12x$ と直線 $y = -7$ の共有点の x 座標は、

$$\begin{aligned}
 2x^3 + 2x^2 - 12x + 7 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x-1)^2 (2x+7) &= 0 \\
 \therefore x &= 1, -\frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

である。したがって、 k が $-7 < k < 20$ の範囲にあるとき、 α は下図の実線部で表される部分の x 座標として表せる。ただし端点は除く。

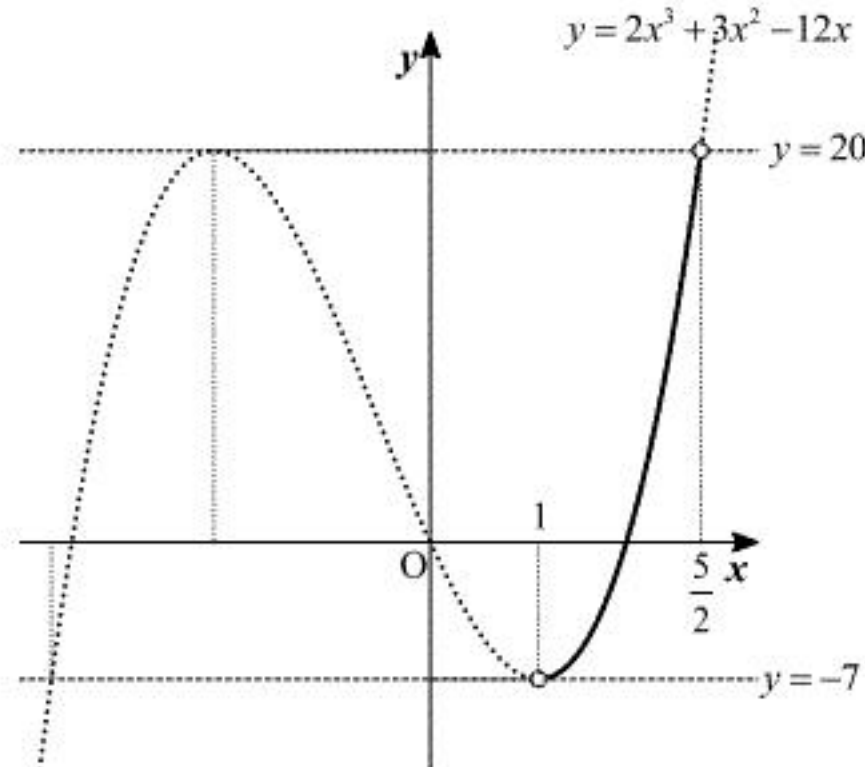


よって、 α のとりうる値の範囲は $-\frac{7}{2} < \alpha < -2$ となる。同様に、 γ は 3 次方程式

$2x^3 + 2x^2 - 12x - k = 0$ の最大の解であるため、 γ は曲線 $y = 2x^3 + 2x^2 - 12x$ と直線 $y = k$ の 3 つの共有点の x 座標の中で、最大となるものである。曲線 $y = 2x^3 + 2x^2 - 12x$ と直線 $y = 20$ の共有点の x 座標は、

$$\begin{aligned}
 2x^3 + 2x^2 - 12x - 20 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x+2)^2 (2x-5) &= 0 \\
 \therefore x &= -2, \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

である。したがって、 k が $-7 < k < 20$ の範囲にあるとき、 γ は下図の実線部で表される部分の x 座標として表せる。ただし端点は除く。



よって、 γ のとりうる値の範囲は $1 < \gamma < \frac{5}{2}$ となる。

(1)

m, n は $m > n \geq 2$ を満たす自然数であるから,

$$\begin{aligned} m^2 + mn + n^2 &> m^2 > m > m - n \\ \therefore u &> v \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned} u - v^2 &= (m^2 + mn + n^2) - (m - n)^2 \\ &= (m^2 + mn + n^2) - (m^2 - 2mn + n^2) \\ &= 3mn \end{aligned}$$

であり, mn は自然数より, $u - v^2$ は 3 の倍数である。

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned} m^3 + 1 &= n^3 + 10^3 \\ \Leftrightarrow m^3 - n^3 &= 10^3 - 1 \\ \Leftrightarrow (m - n)(m^2 + mn + n^2) &= 999 \\ \Leftrightarrow uv &= 3^3 \cdot 37 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

と変形できる。(1)より, u, v は $u > v \geq 1$ を満たす自然数であるから, ①を満たす組 (u, v) の候補は,

$$(u, v) = (3^3 \cdot 37, 1), (3^2 \cdot 37, 3), (3 \cdot 37, 3^2), (37, 3^3)$$

に限られる。ここで, (2)より, $u - v^2$ は 3 の倍数であるが, これらの組のうち $u - v^2$ が 3 の倍数となるものは,

$$(u, v) = (3^2 \cdot 37, 3), (3 \cdot 37, 3^2)$$

に限られる。以下ではこの 2 組について考える。

[1] $(u, v) = (3^2 \cdot 37, 3)$ のとき

$$\begin{aligned} &\begin{cases} u = 3^2 \cdot 37 \\ v = 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} m^2 + mn + n^2 = 3^2 \cdot 37 \\ m - n = 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} (n+3)^2 + n(n+3) + n^2 = 3^2 \cdot 37 \\ m = n+3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 3n^2 + 9n + 9 - 3^2 \cdot 37 = 0 \\ m = n+3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} n^2 + 3n - 108 = 0 \\ m = n+3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} (n+12)(n-9) = 0 \\ m = n+3 \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立ち, $m > n \geq 2$ を満たす組は,

$$(m, n) = (12, 9)$$

である。

[2] $(u, v) = (3 \cdot 37, 3^2)$ のとき

$$\begin{aligned} &\begin{cases} u = 3 \cdot 37 \\ v = 3^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} m^2 + mn + n^2 = 3 \cdot 37 \\ m - n = 3^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} (n+9)^2 + n(n+9) + n^2 = 3 \cdot 37 \\ m = n+9 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 3n^2 + 27n + 81 - 3 \cdot 37 = 0 \\ m = n+9 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} n^2 + 9n - 10 = 0 \\ m = n+9 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} (n+10)(n-1) = 0 \\ m = n+9 \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つが, $n \geq 2$ より, これを満たす組 (m, n) は存在しない。

以上[1], [2]より, $m^3 + 1 = n^3 + 10^3$ を満たす m, n の組は,

$$(m, n) = (12, 9)$$

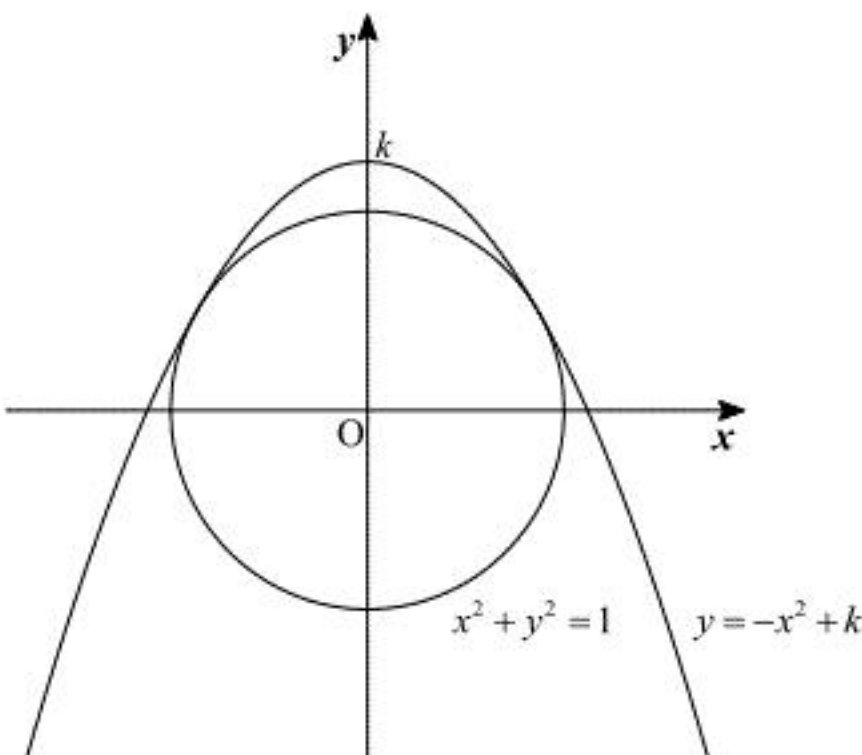
である。

(答) $(m, n) = (12, 9)$

3

(1)

円 $x^2 + y^2 = 1$ と放物線 $y = -x^2 + k$ はともに y 軸対称であるから、円と放物線がちょうど2つの共有点を持ち、それぞれの共有点において円の接線と放物線の接線が一致するとき、下図のようになる。



共有点の座標を (p, q) とおく。まず、この点が放物線 $y = -x^2 + k$ 上にあることから、

$$p^2 + q^2 = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$q = -p^2 + k \quad \dots \textcircled{2}$$

である。この点における円 $x^2 + y^2 = 1$ の接線は、

$$px + qy = 1$$

であり、この点における放物線 $y = -x^2 + k$ の接線は、 $y = -x^2 + k$ に対して $y' = -2x$ であることから

$$y - q = -2p(x - p) \Leftrightarrow 2px + y = 2p^2 + q$$

である。それぞれの接線は一致することから、接線の傾きが一致し、

$$p \cdot 1 + q \cdot (-2p) = 0$$

$$\Leftrightarrow p(1 - 2q) = 0$$

となる。図より2点で接するためには $p = 0$ は不適であるので、 $q = \frac{1}{2}$ となる。このとき、 $\textcircled{1}$ より

$$p^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$\therefore p = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となり、また $\textcircled{2}$ より

$$\frac{1}{2} = -\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + k$$

$$\therefore k = \frac{5}{4}$$

である。逆に、 $k = \frac{5}{4}$ であるとき、円 $x^2 + y^2 = 1$ と放物線 $y = -x^2 + \frac{5}{4}$ の共有点は、2式から x を消去することにより、

$$1 - y^2 = -y + \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

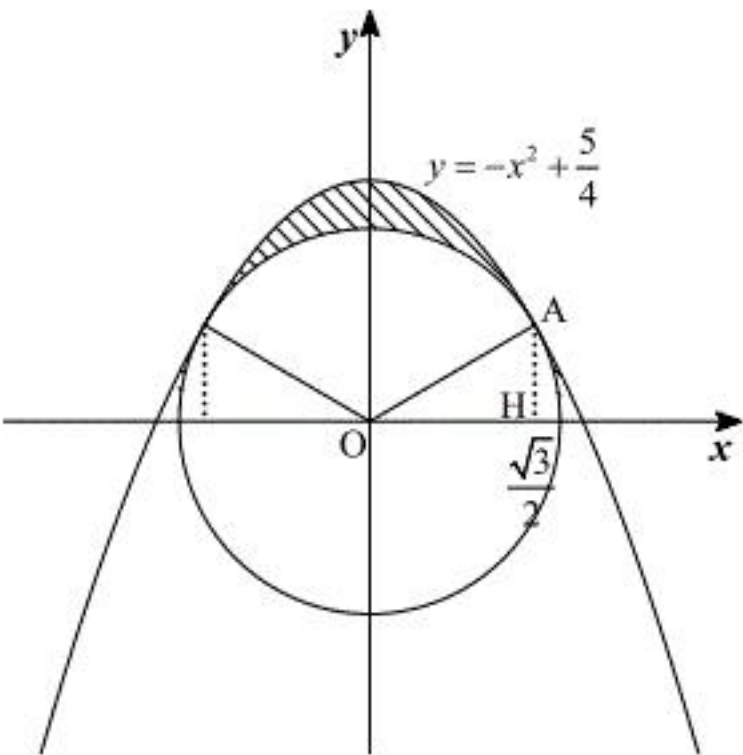
$$\therefore y = \frac{1}{2}$$

となり、確かに共有点は $\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ の2つ以外にはない。

(答) 共有点の座標 $\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $k = \frac{5}{4}$

(2)

円 $x^2 + y^2 = 1$ のうち y 座標が正の部分と放物線 $y = -x^2 + \frac{5}{4}$ とで囲まれる図形は下図の斜線部分になる。 y 軸対称であるため、この部分の面積を求めるためには、 $x > 0$ の部分の面積を2倍すればよい。



$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ とすると、 OA と x 軸の正の向きのなす角は 30° である。また点 A から x 軸に下した垂線の足を H とする。 $x > 0$ の部分の図形の面積は $y = -x^2 + \frac{5}{4}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = 0$, $y = 0$ で囲まれる図形の面積から、 $\triangle OAH$ の面積と、半径1で中心角が 60° の扇形の面積を引いたものである。ゆえに、 $x > 0$ の部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(-x^2 + \frac{5}{4}\right) dx - \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{4}x\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + \frac{5}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

である。したがって、求めたい部分の面積は、

$$2S = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$$

となる。

(答) $\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$