

【解答】

(1)	1				
	2				
(2)	2	3	4	5	
	7	1	2	5	
(3)	6	7	8	9	10
	－	3	9	6	3
(4)	11	12	13	14	15
	1	2	0	6	3

【解説】

(1)

$$\frac{0.25}{1-0.25} = \frac{0.25}{0.75} = \frac{1}{3}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\log_3 \left\{ \left(\frac{0.25}{1-0.25} \right)^{1-0.25} + \left(\frac{1-0.25}{0.25} \right)^{0.25} \right\} &= \log_3 \left\{ \left(\frac{1}{3} \right)^{1-0.25} + \left(\frac{1}{3} \right)^{-0.25} \right\} \\ &= \log_3 \left\{ \left(\frac{1}{3} + 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{-0.25} \right\} \\ &= \log_3 \frac{4}{3} - 0.25 \log_3 \frac{1}{3} \\ &= \log_3 4 - \log_3 3 + 0.25 \\ &= 2 \log_3 2 - 0.75\end{aligned}$$

となる。

(2)

解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 3 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1 \\ \alpha\beta\gamma = -2 \end{cases}$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta + \gamma)^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 3^2 - 2 \cdot 1 \\ &= 7\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma &= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) \\ \Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= 3(7-1) + 3(-2) \\ &= 12\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) + \alpha\beta\gamma &= (\beta + \gamma)\alpha^2 + \{(\beta + \gamma)^2 + \beta\gamma\}\alpha + \beta\gamma(\beta + \gamma) \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) &= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma \\ &= 3 \cdot 1 - (-2) \\ &= 5\end{aligned}$$

となる。

(3)

点 A の座標は、

$$1^2 - \sqrt{3} \cdot 1 + 3\sqrt{3} = 1 + 2\sqrt{3}$$

より、 $(1, 1 + 2\sqrt{3})$ である。また、関数 $y = x^2 - \sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$ について

$$y' = 2x - \sqrt{3}$$

であるため、 $x = 1$ となる点 A における接線の傾きは $2 - \sqrt{3}$ である。よって、点 A における法線の傾きは、

$$-\frac{1}{2 - \sqrt{3}} = -(2 + \sqrt{3})$$

である。以上より、 ℓ_2 の方程式は、

$$\begin{aligned}y - (1 + 2\sqrt{3}) &= -(2 + \sqrt{3})(x - 1) \\ \Leftrightarrow y &= -(2 + \sqrt{3})x + 3 + 3\sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。これと $y = x^2 - \sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$ を連立させ、 y を消去して解くと、

$$\begin{aligned}x^2 - \sqrt{3}x + 3\sqrt{3} &= -(2 + \sqrt{3})x + 3 + 3\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 3)(x - 1) &= 0 \\ \therefore x &= -3, 1\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$(-3)^2 - \sqrt{3} \cdot (-3) + 3\sqrt{3} = 9 + 6\sqrt{3}$$

より、 ℓ_2 と関数 $y = x^2 - \sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$ は点 A および点 $(-3, 9 + 6\sqrt{3})$ で交わる。

(4)

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= \frac{-12}{6 \cdot 4} \\ \therefore \cos \theta &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから、

$$\theta = 120^\circ$$

である。また、 $\triangle OAB$ の面積は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin 120^\circ &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 6\sqrt{3}\end{aligned}$$

である。

Ⅱ

〔解答〕

(1)	16	17	18	19	20	21	22	23
	1	0	9	5	7	1	3	8
(2)	24	25	26					
	5	0	3					
(3)	27	28	29	30	31			
	3	4	3	1	3			
(4)	32	33	34	35				
	2	3	4	7				

〔解説〕

(1)

13で割ると8余る自然数を小さい方から順に考えると、
8, 21, 34, 47...

となることから、7で割ると5余り、13で割ると8余る自然数のうち最小のものは47である。
また、7と13は互いに素であるから、0以上の整数 k を用いることで、7で割ると5余り、13で割ると8余る自然数は $91k+47$ と表せる。 $91k+47$ が3桁の整数となるのは $1\leq k\leq 10$ のときのみであるから、3桁のものは10個あり、その中で最大のものは $91\cdot 10+47=957$ 、最小のものは $91\cdot 1+47=138$ である。

(2)

$$\sum_{k=1}^{2020} \log_7 k = \log_7 (1 \times 2 \times \cdots \times 2020)$$

であるから、真数部分を比較することで $N=1 \times 2 \times \cdots \times 2020=2020!$ である。ここで、 N の末尾の連続する0の個数は、 N が10で割り切れる回数と同じである。つまり、 N の持つ因数10の個数と同じであるが、 $10=2 \cdot 5$ であるから、それは N の素因数2の個数および5の個数のうち小さい方と等しい。 N は連続する自然数の積であり、素因数5より素因数2の方が多く持つから、 N の持つ素因数5の個数を求めればよい。

$$2020 \div 5 = 404$$

$$2020 \div 25 = 80 \cdots 20$$

$$2020 \div 125 = 16 \cdots 20$$

$$2020 \div 625 = 3 \cdots 145$$

$$2020 \div 3125 = 0 \cdots 2020$$

であることから、 N の末尾の連続する0の個数は

$$404 + 80 + 16 + 3 = 503$$

と求まる。

(3)

$a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=2$ を変形すると、

$$\begin{cases} a_{n+2}-3a_{n+1}=4(a_{n+1}-3a_n)+2 \\ a_{n+2}-4a_{n+1}=3(a_{n+1}-4a_n)+2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+2}-3a_{n+1}+\frac{2}{3}=4\left(a_{n+1}-3a_n+\frac{2}{3}\right) \\ a_{n+2}-4a_{n+1}+1=3(a_{n+1}-4a_n+1) \end{cases}$$

となる。 $a_1=2, a_2=4$ であることから、数列 $\left\{a_{n+1}-3a_n+\frac{2}{3}\right\}$ は初項 $4-3\cdot 2+\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}$ 、公比4の等比数列、数列 $\{a_{n+1}-4a_n+1\}$ は初項 $4-4\cdot 2+1=-3$ 、公比3の等比数列であることがわかる。
よって、それぞれ

$$a_{n+1}-3a_n+\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}\cdot 4^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1}-3a_n=-\frac{4^n}{3}-\frac{2}{3}$$

$$a_{n+1}-4a_n+1=-3\cdot 3^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1}-4a_n=-3^n-1$$

となるため、2式の差をとることで、

$$a_n=\left(-\frac{4^n}{3}-\frac{2}{3}\right)-(-3^n-1)=3^n-\frac{4^n}{3}+\frac{1}{3}$$

と求まる。

(4)

$a_1=\frac{7}{12}$ のとき、順に定義に従って計算していくと、

$$a_2=2-2\cdot \frac{7}{12}=\frac{5}{6}$$

$$a_3=2-2\cdot \frac{5}{6}=\frac{1}{3}$$

$$a_4=2\cdot \frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$a_5=2-2\cdot \frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

となり、 a_4 以降は $\frac{2}{3}$ であることが分かる。よって、 $a_{30}=\frac{2}{3}$ と求まる。また、 $a_1=\frac{1}{7}$ のとき、順に定義に従って計算していくと、

$$a_2=2\cdot \frac{1}{7}=\frac{2}{7}$$

$$a_3=2\cdot \frac{2}{7}=\frac{4}{7}$$

$$a_4=2-2\cdot \frac{4}{7}=\frac{6}{7}$$

$$a_5=2-2\cdot \frac{6}{7}=\frac{2}{7}$$

となり、 a_2 以降は3項ずつの周期性を持つ。よって、

$$a_{30}=a_{1+3\cdot 9+2}=a_{1+2}=a_3=\frac{4}{7}$$

と求まる。

Ⅲ

【解答】

(1)	36	37				
	4	9				
(2)	38	39	40	41		
	1	2	5	2		
(3)	42	43	44	45	46	47
	1	2	2	4	7	8
(4)	48	49	50	51		
	7	2	8	9		
(5)	52	53	54	55	56	57
	8	5	0	3	5	0

【解説】

(1)

3個のさいころを同時に投げたときの目の出方の総数は

$$6^3=216 \text{ (通り)}$$

であり、これらの起こり方は同様に確からしい。このうち、「少なくとも2つは同じ目が出る」という事象の余事象は「同じ目が1つも出ない」であり、その場合の数は

$$6\cdot5\cdot4=120 \text{ (通り)}$$

である。したがって、少なくとも2つは同じ目が出る確率は

$$1-\frac{120}{216}=\frac{4}{9}$$

と求まる。

(2)

$n=0,1,\cdots,11$ において、12個のさいころを同時に投げたとき、1の目が n 個出る確率

$P(X=n)$ は

$$P(X=n)={}_{12}\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^{12-n}$$

である。また

$$P(X=n+1)={}_{12}\mathrm{C}_{n+1}\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}\left(\frac{5}{6}\right)^{12-(n+1)}$$

であるから

$$\begin{aligned}\frac{P(X=n+1)}{P(X=n)}&=\frac{{}_{12}\mathrm{C}_{n+1}\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}\left(\frac{5}{6}\right)^{12-(n+1)}}{{}_{12}\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^{12-n}}\\&=\frac{12!\cdot\frac{1}{6}}{(n+1)!\{12-(n+1)\}!\cdot\frac{5}{6}}\\&=\frac{12!\cdot\frac{5}{6}}{n!(12-n)!\cdot\frac{5}{6}}\\&=\frac{n!(12-n)!}{5(n+1)!(11-n)!}\\&=\frac{12-n}{5n+5}\end{aligned}$$

と求まる。また、これより

$$\frac{P(X=n+1)}{P(X=n)}\geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{12-n}{5n+5}\geq 1$$

$$\Leftrightarrow 12-n\geq 5n+5$$

$$\Leftrightarrow n\leq \frac{7}{6}$$

となる。ここで、 n は整数であるから、この不等式において等号は成立しない。ゆえに、

$$\begin{cases}\frac{P(X=n+1)}{P(X=n)}>1\ (n=0,1)\\ \frac{P(X=n+1)}{P(X=n)}<1\ (n=2,3,\cdots,11)\end{cases}$$

であるから

$$P(X=1)<P(X=2)>P(X=3)>\cdots>P(X=12)$$

となる。したがって、 $P(X=n)$ が最大となるのは $n=2$ のときである。

(3)

2つの事象 A,B について、 A が起こるうえで B が発生する条件付き確率 $P_A(B)$ は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

と表せるから

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(A)\cdot P_A(B)\\&=0.4\cdot 0.3\\&=0.12\end{aligned}$$

である。また B が起こるうえで A が発生する条件付き確率 $P_B(A)$ は

$$\begin{aligned}P_B(A)&=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\\&=\frac{0.12}{0.5}\\&=0.24\end{aligned}$$

である。さらに、

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=0.4+0.5-0.12\\&=0.78\end{aligned}$$

である。

(4)

取り出した2枚の組み合わせは

$$(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)$$

の10通りであり、これらは同様に確からしく起こる。このうち、 $X=1$ となる組は

$$(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)$$

の4通りである。同様にして $X=2,3,4$ となる組は順にそれぞれ

$$(1,3),(2,4),(3,5)$$

$$(1,4),(2,5)$$

$$(1,5)$$

であり、以上ですべての組を考えたことになる。このことから

$$\begin{aligned}E(X)&=1\cdot\frac{4}{10}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{2}{10}+4\cdot\frac{1}{10}\\&=2\end{aligned}$$

であり、また

$$\begin{aligned}E(X^2)&=1^2\cdot\frac{4}{10}+2^2\cdot\frac{3}{10}+3^2\cdot\frac{2}{10}+4^2\cdot\frac{1}{10}\\&=5\end{aligned}$$

となる。以上のことから

$$\begin{aligned}E(2X+3)&=E(2X)+3\\&=2E(X)+3\\&=7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(5X^2+3)&=E(5X^2)+3\\&=5E(X^2)+3\\&=28\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(3X+1)&=V(3X)\\&=E(9X^2)-\{E(3X)\}^2\\&=9\left[E(X^2)-\{E(X)\}^2\right]\\&=9\cdot(5-2^2)\\&=9\end{aligned}$$

となる。

(5)

商品の販売価格を x 円値上げするとする。このとき商品1個あたりの利益は

$$800+x-500=x+300 \text{ (円)}$$

であり、1日の販売個数は

$$-x+400 \text{ (個)}$$

となるから利益 S は

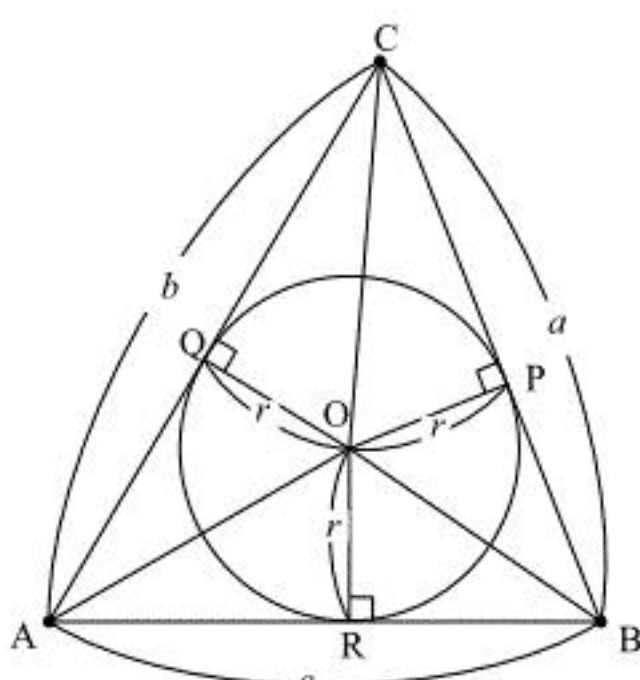
$$\begin{aligned}S&=(x+300)(-x+400)\\&=-x^2+100x+120000\\&=-(x-50)^2+122500\end{aligned}$$

と表せる。よって $x=50$ のとき利益が最大となる。そのときの販売価格は850円で、1日の販売個数は350個である。

IV

(1)

三角形 ABC の内心から辺 BC, CA, AB に下した垂線の足を P, Q, R とする。また $\triangle ABC$ の内心を O とする。このとき、それらを図示すると以下ようになる。



このとき

$$S = (\triangle ABO \text{ の面積}) + (\triangle BCO \text{ の面積}) + (\triangle CAO \text{ の面積})$$

であるので

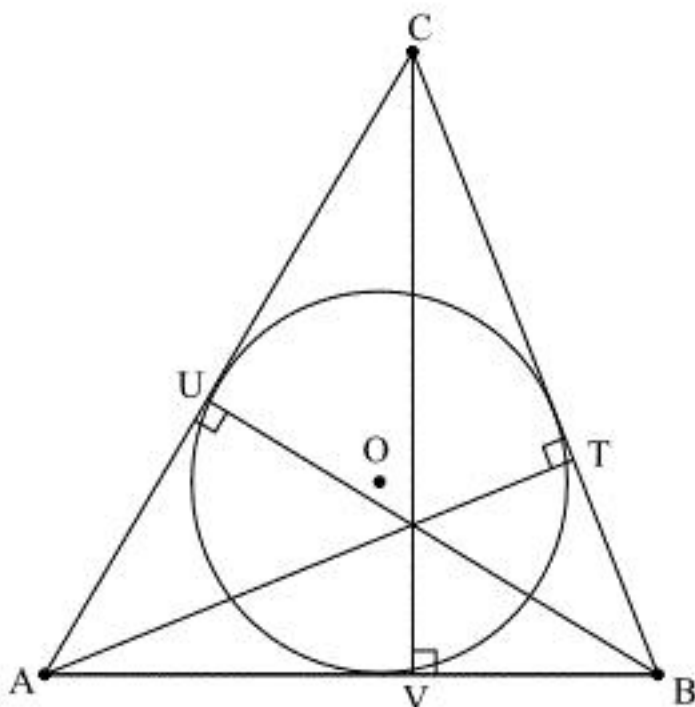
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r + \frac{1}{2}c \cdot r \\ &= \frac{1}{2}r(a+b+c) \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(2)

頂点 A, B, C から対辺またはその延長に下ろした垂線の足を、それぞれ T, U, V とする。それらを図示すると以下ようになる。



このとき、 $AT = h_A$, $BU = h_B$, $CV = h_C$ であり、それらは正であるため、正の実数 $\frac{1}{h_A}$, $\frac{1}{h_B}$, $\frac{1}{h_C}$ が

存在する。ここで、与えられた不等式 $3\sqrt[3]{xyz} \leq x+y+z$ において $x = \frac{1}{h_A}$, $y = \frac{1}{h_B}$, $z = \frac{1}{h_C}$ とおく

と

$$\begin{aligned} 3\sqrt[3]{\frac{1}{h_A} \cdot \frac{1}{h_B} \cdot \frac{1}{h_C}} &\leq \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{\left(\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C}\right)} &\leq \sqrt[3]{h_A h_B h_C} \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(3)

三角形の面積公式から

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ah_A \\ \Leftrightarrow a &= 2S \cdot \frac{1}{h_A} \end{aligned}$$

である。また、同様に

$$b = 2S \cdot \frac{1}{h_B}, c = 2S \cdot \frac{1}{h_C}$$

である。ゆえに

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}r(a+b+c) \\ \Leftrightarrow S &= \frac{1}{2}r \left(2S \cdot \frac{1}{h_A} + 2S \cdot \frac{1}{h_B} + 2S \cdot \frac{1}{h_C} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C}\right)} &= r \end{aligned}$$

となるので、(2)で証明した不等式に代入して

$$\begin{aligned} \frac{3}{\left(\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C}\right)} &\leq \sqrt[3]{h_A h_B h_C} \\ \Leftrightarrow 3r &\leq \sqrt[3]{h_A h_B h_C} \end{aligned}$$

が成り立つ。これを両辺3乗して

$$27r^3 \leq h_A h_B h_C$$

となる。

(証明終)