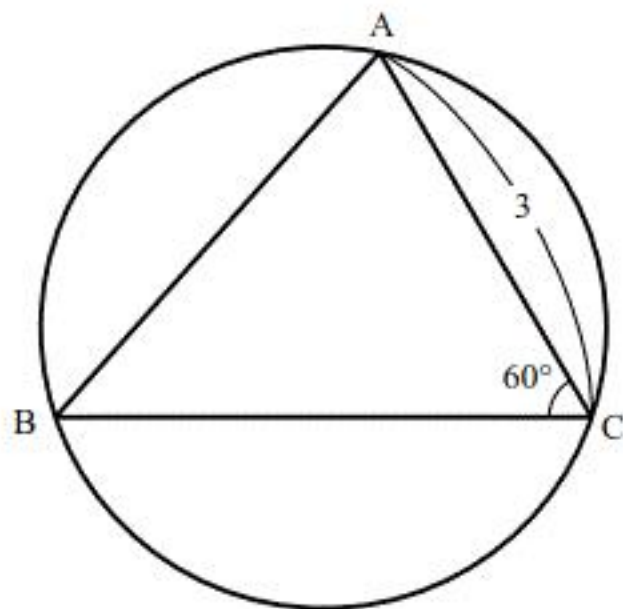


## 【解答】

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 3 | a | 2 | 1 | 2 |

## 【解説】

以下に、半径2の円とそれに内接する三角形ABCを図示する。



正弦定理より、

$$\begin{aligned}\frac{AB}{\sin \angle C} &= 2 \cdot 2 \\ \Leftrightarrow \frac{AB}{\sin 60^\circ} &= 4 \\ \therefore AB &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

である。また、余弦定理より、

$$\begin{aligned}AB^2 &= AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \angle C \\ \Leftrightarrow 12 &= 9 + BC^2 - 6 \cdot BC \cdot \cos 60^\circ \\ \Leftrightarrow BC^2 - 3BC - 3 &= 0 \\ \therefore BC &= \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \quad (\because BC > 0)\end{aligned}$$

である。

# Ⅱ

【解答】

|     |                                                                |                                                                |                                                                |                                                                |
|-----|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| (1) | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">8</span>  | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">9</span>  | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">11</span> |
|     | 3                                                              | 4                                                              | 3                                                              | 2                                                              |
| (2) | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">12</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">13</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">14</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">15</span> |
|     | 5                                                              | 4                                                              | 1                                                              | 2                                                              |
| (3) | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">16</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">17</span> |                                                                |                                                                |
|     | 5                                                              | 8                                                              |                                                                |                                                                |

【解説】

(1)

与式より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= 3\overrightarrow{CB} + 6\overrightarrow{AD} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} &= 3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) + 6\overrightarrow{AD} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} &= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

である。

(2)

3点 A, C, M は同一直線上にあるから、実数  $k$  を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= k\overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} &= \frac{3}{4}k\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}k\overrightarrow{AD} \quad \dots\dots ①\end{aligned}$$

と表せる。また、点 M は線分 BD 上の点であるから、実数  $s$  ( $0 < s < 1$ ) を用いて

$$\overrightarrow{AM} = s\overrightarrow{AB} + (1-s)\overrightarrow{AD} \quad \dots\dots ②$$

と表せる。ここで、ベクトル  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AD}$  はゼロベクトルでなく互い平行でないから、①, ②の係数を比較すると、

$$\begin{cases} s = \frac{3}{4}k \\ 1-s = \frac{3}{2}k \end{cases} \quad \therefore k = \frac{4}{9}, s = \frac{1}{3}$$

が得られる。これより、

$$\overrightarrow{AM} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

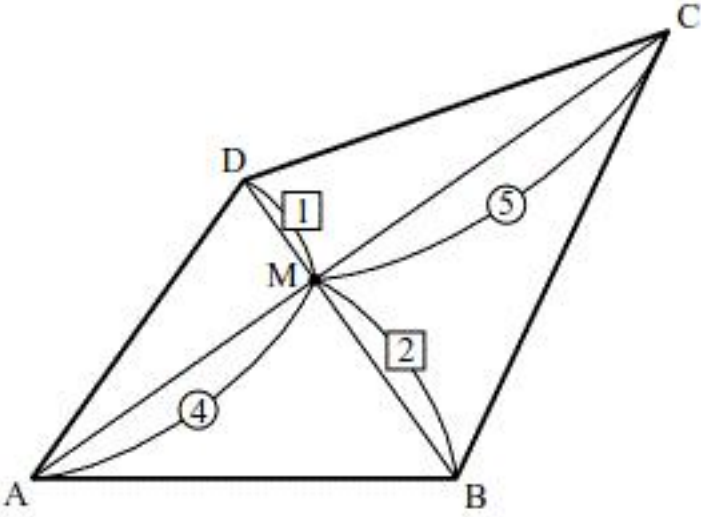
が成り立つから、点 M は線分 AC を 4:5 に内分し、線分 BD を 2:1 に内分する点である。したがって、

$$\frac{MC}{AM} = \frac{5}{4}, \frac{MD}{BM} = \frac{1}{2}$$

である。

(3)

三角形 ABC の面積を  $\triangle ABC$  と表すことにする。以下に、四角形 ABCD および点 M を図示する。



$BM:MD = 2:1$  であるから、

$$\triangle ABM:\triangle ADM = 2:1$$

が成り立つ。また、 $AM:MC = 4:5$  であるから、

$$\triangle ADM:\triangle CDM = 4:5$$

が成り立つ。以上より、

$$\triangle CDM:\triangle ABM = 8:5$$

$$\Leftrightarrow \triangle CDM/\triangle ABM = \frac{5}{8}$$

となる。

### Ⅲ

【解答】

|     |                                                                |                                                                |                                                                |                                                                |                                                                |
|-----|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| (1) | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">18</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">19</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">20</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">21</span> |                                                                |
|     | 1                                                              | 6                                                              | 3                                                              | 2                                                              |                                                                |
| (2) | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">22</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">23</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">24</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">25</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">26</span> |
|     | 1                                                              | 2                                                              | 1                                                              | 5                                                              | 4                                                              |

【解説】

(1)

$x > 0$  かつ  $y > 0$  のとき、

$$\begin{cases} X = \log_2 x \\ Y = \log_2 y \end{cases}$$

とおく。このとき、連立方程式(\*)の両辺に対して底を2とする対数をとると、

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^3 y^2 = 2^{22} \\ \frac{x^k}{y} = 2^3 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x^3 + \log_2 y^2 = \log_2 2^{22} \\ \log_2 x^k - \log_2 y = 2^3 \end{cases} \quad (\because x, y > 0) \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 3X + 2Y = 22 \\ kX - Y = 3 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (2k+3)X = 28 \\ kX - Y = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。 $2k+3=0$  のとき、 $(2k+3)X=28$  は成立せず解なしである。 $2k+3 \neq 0$  のとき、

$$\begin{cases} X = \frac{28}{2k+3} \\ Y = \frac{28k}{2k+3} - 3 \end{cases}$$

が得られる。よって、 $k=2$  を代入すると、

$$\begin{aligned} X &= \frac{28}{2 \cdot 2 + 3} \\ &= 4 \\ Y &= \frac{28 \cdot 2}{2 \cdot 2 + 3} - 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

であり、 $x = 2^X, y = 2^Y$  より、

$$\begin{aligned} x &= 2^4 \\ &= 16 \\ y &= 2^5 \\ &= 32 \end{aligned}$$

となる。

(2)

$2k+3=0$  のとき、連立方程式(\*)は解を持たないため、条件を満たさない。よって、以下  $2k+3 \neq 0$  の場合を考える。

$$\begin{aligned} & 0 < x < 128 \text{ かつ } 0 < y < 128 \\ & \Leftrightarrow X < \log_2 2^7 \text{ かつ } Y < \log_2 2^7 \\ & \Leftrightarrow X < 7 \text{ かつ } Y < 7 \end{aligned}$$

となる。したがって、(1)より、

$$\begin{aligned} & \frac{28}{2k+3} < 7 \text{ かつ } \frac{28k}{2k+3} - 3 < 7 \\ & \Leftrightarrow \frac{4}{2k+3} < 1 \text{ かつ } \frac{14k}{2k+3} < 5 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。ここで、 $2k+3$  の正負に応じて場合分けを行う。

[1]  $2k+3 > 0$  のとき

このとき、

$$\begin{aligned} & 2k+3 > 0 \\ & \Leftrightarrow k > -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

である。また、①より、

$$\begin{aligned} & 4 < 2k+3 \text{ かつ } 14k < 5(2k+3) \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{2} < k \text{ かつ } k < \frac{15}{4} \end{aligned}$$

となる。よって、条件を満たす実数  $k$  の値の範囲は、

$$\frac{1}{2} < k < \frac{15}{4}$$

である。

[2]  $2k+3 < 0$  のとき

このとき、

$$\begin{aligned} & 2k+3 < 0 \\ & \Leftrightarrow k < -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

である。また、①より、

$$\begin{aligned} & 4 > 2k+3 \text{ かつ } 14k > 5(2k+3) \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{2} > k \text{ かつ } k > \frac{15}{4} \end{aligned}$$

となる。よって、条件を満たす実数  $k$  は存在しない。

以上、[1], [2]より、求める実数  $k$  の範囲は、

$$\frac{1}{2} < k < \frac{15}{4}$$

である。



【解答】

|     |               |               |               |               |               |               |               |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| (1) | <div>27</div> | <div>28</div> | <div>29</div> | <div>30</div> | <div>31</div> | <div>32</div> | <div>33</div> |
|     | —             | 2             | —             | 1             | 6             | —             | 9             |
| (2) | <div>34</div> | <div>35</div> | <div>36</div> | <div>37</div> |               |               |               |
|     | 4             | —             | 1             | 0             |               |               |               |
| (3) | <div>38</div> | <div>39</div> |               |               |               |               |               |
|     | 6             | 4             |               |               |               |               |               |

【解説】

(1)

$f(x)=x^2$  とすると、 $f'(x)=2x$  である。放物線  $C_1: y=f(x)$  上の点  $(t, f(t))$  における接線の

方程式は  $y=f'(t)(x-t)+f(t)$  であるから、接線  $\ell_1$  の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(-1)(x+1)+f(-1) \\ \Leftrightarrow y &= -2(x+1)+1 \\ \therefore y &= -2x-1 \end{aligned}$$

である。よって、接線  $\ell_1$  の傾きは  $-2$ 、 $y$  切片は  $-1$  である。また、接線  $\ell_2$  の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(3)(x-3)+f(3) \\ \Leftrightarrow y &= 6(x-3)+9 \\ \therefore y &= 6x-9 \end{aligned}$$

である。よって、接線  $\ell_2$  の傾きは  $6$ 、 $y$  切片は  $-9$  である。

(2)

接線  $\ell_1$  が放物線  $C_2$  に接するのは、

$$\begin{aligned} -2x-1 &= -x^2+ax+b \\ \Leftrightarrow x^2-(a+2)x-(b+1) &= 0 \end{aligned}$$

の判別式を  $D_1$  としたとき、 $D_1=0$  となるときである。また、接線  $\ell_2$  が放物線  $C_2$  に接するのは

$$\begin{aligned} 6x-9 &= -x^2+ax+b \\ \Leftrightarrow x^2-(a-6)x-(b+9) &= 0 \end{aligned}$$

の判別式を  $D_2$  としたとき、 $D_2=0$  となるときである。よって、接線  $\ell_1, \ell_2$  がともに放物線  $C_2$  に接するのは、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} D_1=0 \\ D_2=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} (a+2)^2+4(b+1)=0 \\ (a-6)^2+4(b+9)=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a^2+4a+4b+8=0 \\ a^2-12a+4b+72=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a^2+4a+4b+8=0 \\ a^2+4a+4b+8=a^2-12a+4b+72 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 4^2+4\cdot 4+4b+8=0 \\ a=4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a=4 \\ b=-10 \end{cases} \end{aligned}$$

のときである。

(3)

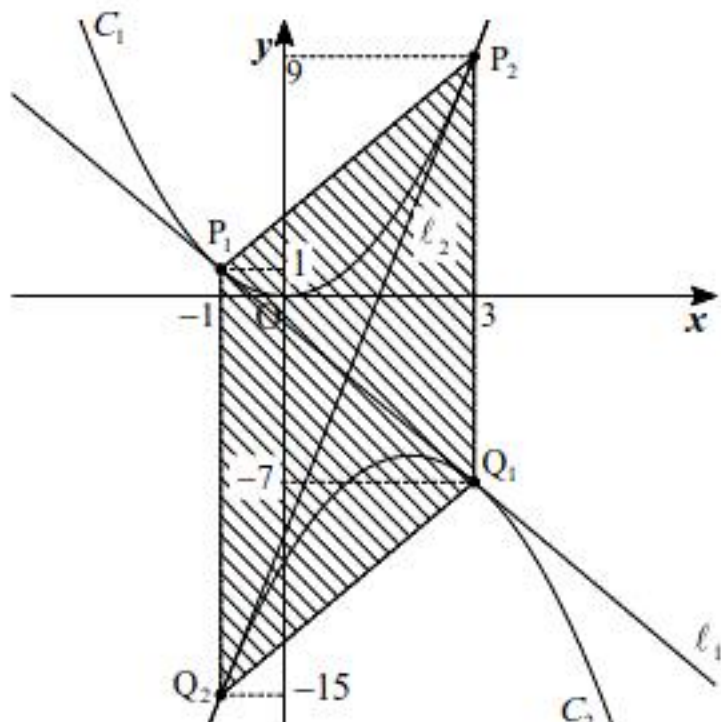
(2)より  $C_2: y=-x^2+4x-10$  である。点  $Q_1$  の  $x$  座標は

$$\begin{aligned} -2x-1 &= -x^2+4x-10 \\ \Leftrightarrow (x-3)^2 &= 0 \\ \therefore x &= 3 \end{aligned}$$

となるから、点  $Q_1$  の  $y$  座標は  $-2\cdot 3-1=-7$  である。また、点  $Q_2$  の  $x$  座標は

$$\begin{aligned} 6x-9 &= -x^2+4x-10 \\ \Leftrightarrow (x+1)^2 &= 0 \\ \therefore x &= -1 \end{aligned}$$

となるから、点  $Q_2$  の  $y$  座標は  $6\cdot (-1)-9=-15$  である。ここで、放物線  $C_1, C_2$ 、直線  $\ell_1, \ell_2$  を図示すると下図を得る。また、四角形  $P_1P_2Q_1Q_2$  は下図の斜線部分のようになる。



$\overline{Q_2P_1}=(0, 16)$ 、 $\overline{Q_1P_2}=(0, 16)$  であるから、底辺を線分  $Q_2P_1$  としたとき、四角形  $P_1P_2Q_1Q_2$  は底辺の長さが  $16$ 、高さが  $4$  の平行四辺形である。よって、その面積は  $16\cdot 4=64$  である。