

【解答】

(1)	1	2	
	2	3	
(2)	3	4	5
	7	1	2
(3)	6	7	
	3	8	

【解説】

(1)

ゲーム終了までに A, B 合わせて 3 枚のカードが引かれる。したがって、 $k=3$ の場合、3 のカードを引いたプレイヤーが勝利する。A が 1 回目に 3 のカードを引く確率は $\frac{1}{3}$ である。A が 2 回目に 3 のカードを引く場合、A, B はともに 1 回目に 3 を引かないから、その確率は

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

である。よって、A の勝つ確率は

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

である。

(2)

ゲーム終了までに 4 のカードが引かれるかどうかで場合分けする。

[1] 4 のカードが引かれるとき

4 のカードを引いたプレイヤーが勝利する。A が 1 回目に 4 のカードを引く確率は $\frac{1}{4}$ である。

A が 2 回目に 4 のカードを引く場合、A, B はともに 1 回目に 4 のカードを引かず、A が 2 回目に 4 を引くから、その確率は

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

である。したがって A の勝つ確率は

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

である。

[2] 4 のカードが引かれないとき

3 のカードを引いたプレイヤーが勝利する。A が 1 回目に 3 のカードを引き、その後 4 のカードが引かれない確率は

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$

である。A が 2 回目に 3 のカードを引き、4 のカードが 1 度も引かれない場合、A, B はともに 1 回目には 3 のカードも 4 のカードも引かないから、その確率は

$$\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$

である。したがって A の勝つ確率は

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$$

である。

以上, [1], [2] は排反だから、A の勝つ確率は

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$

である。

(3)

A が 1 回目に 1 のカードを引き、かつ A がゲームに勝つ場合、A が 2 回目に引くカードの数字が、B が 1, 2 回目に引くカードの数字より大きければよい。A が 2 回目に引くカードの数字で場合分けする。

[1] A が 2 回目に 2 のカードを引く場合

このとき B は 1 回目にならず 3 以上のカードを引くことになるから、A は勝利できない。

[2] A が 2 回目に 3 のカードを引く場合

このとき B は 1 回目に 2 のカードを、2 回目に 1 のカードを引かなければならない。したがってその確率は

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{480}$$

である。

[3] A が 2 回目に 4 のカードを引く場合

このとき B は 1 回目に 2 または 3 のカードを、2 回目に 1 または 2 または 3 のカードを引かなければならない。したがってその確率は

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{120}$$

である。

[4] A が 2 回目に 5 のカードを引く場合

このとき B は 1 回目に 2 または 3 または 4 のカードを、2 回目に 1 または 2 または 3 または 4 のカードを引かなければならない。したがってその確率は

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{160}$$

である。

[5] A が 2 回目に 6 のカードを引く場合

このとき B は 1, 2 回目にどのカードを引いても A が勝利する。したがってその確率は

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{30}$$

である。

以上 [1], [2], [3], [4], [5] は排反であり、また A が 1 回目に 1 のカードを引く確率は $\frac{1}{6}$ であるから、求める条件付き確率は

$$\left(\frac{1}{480} + \frac{1}{120} + \frac{3}{160} + \frac{1}{30} \right) \div \frac{1}{6} = \frac{30 \cdot 6}{480} = \frac{3}{8}$$

である。

Ⅱ

〔解答〕

(1)	8	9
	8	5
(2)	10	11
	2	7
(3)	12	13
	5	7

〔解説〕

(1)

$k=2$ のとき、 $1 \leq n \leq 99$ を満たす整数 n について $n(100-n)$ を考える。

$$n(100-n) = -(n-50)^2 + 2500$$

であるから、 $M_2 = 2500$ ($n=50$)、 $m_2 = 99$ ($n=1, 99$) となる。ここで

$$\begin{aligned} M_2 &= 2500 \\ &= 1 \cdot 3^7 + 0 \cdot 3^6 + 1 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 \\ &= 10102121_{(3)} \end{aligned}$$

であるから、 $D_2 = 8$ である。また

$$\begin{aligned} m_2 &= 99 \\ &= 1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 \\ &= 10200_{(3)} \end{aligned}$$

であるから、 $d_2 = 5$ である。

(2)

$1 \leq n \leq 10^k - 1$ のとき

$$n(10^k - n) = -\left(n - \frac{10^k}{2}\right)^2 + \left(\frac{10^k}{2}\right)^2$$

であるから、 $M_k = \left(\frac{10^k}{2}\right)^2$ ($n = \frac{10^k}{2}$)、 $m_k = 10^k - 1$ ($n = 1, 10^k - 1$) となる。 M_k の常用対数をとると

$$\begin{aligned} M_k &= \left(\frac{10^k}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow \log_{10} M_k &= 2(\log_{10} 10^k - \log_{10} 2) \\ \Leftrightarrow \frac{\log_3 M_k}{\log_3 10} &= 2k - 2\log_{10} 2 \\ \Leftrightarrow \log_3 M_k &= \frac{2k - 2\log_{10} 2}{\log_{10} 3} \end{aligned}$$

と変形でき、このとき、自然数 D_k は、

$$\begin{aligned} D_k - 1 &\leq \log_3 M_k < D_k \\ \Leftrightarrow \log_3 M_k < D_k &\leq \log_3 M_k + 1 \end{aligned}$$

をみtas。ここで、 M_k は k に関して単調増加であるから、 $\log_3 M_k$ も k に関して単調増加であり、 $D_k \geq 112$ となる最小の k は $112 - 1 \leq \log_3 M_k$ をみtas最小の k に一致する。よって

$$\begin{aligned} 112 - 1 &\leq \log_3 M_k \\ \Leftrightarrow 111 &\leq \frac{2k - 2\log_{10} 2}{\log_{10} 3} \\ \Leftrightarrow 55.5\log_{10} 3 + \log_{10} 2 &\leq k \\ \Leftrightarrow 26.78005 &\leq k \quad (\because \log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771) \end{aligned}$$

であり、これをみtas最小の自然数 k は 27 である。

(3)

(2)より $m_{27} = 10^{27} - 1$ であるから

$$\begin{aligned} m_{27} &= 10^{27} - 1 \\ \Leftrightarrow m_{27} + 1 &= 10^{27} \\ \Leftrightarrow \log_{10}(m_{27} + 1) &= 27 \\ \Leftrightarrow \frac{\log_3(m_{27} + 1)}{\log_3 10} &= 27 \\ \Leftrightarrow \log_3(m_{27} + 1) &= \frac{27}{\log_{10} 3} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで、自然数 d_k は

$$\begin{aligned} 3^{d_k - 1} &\leq m_k < 3^{d_k} \\ \Leftrightarrow 3^{d_k - 1} - 1 &< m_k \leq 3^{d_k} - 1 \\ \Leftrightarrow 3^{d_k - 1} &< m_k + 1 \leq 3^{d_k} \\ \Leftrightarrow d_k - 1 &< \log_3(m_k + 1) \leq d_k \\ \Leftrightarrow \log_3(m_k + 1) &\leq d_k < \log_3(m_k + 1) + 1 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

と表される。いま、 $\frac{27}{\log_{10} 3} = 56.59\dots$ から $56 < \frac{27}{\log_{10} 3} < 57$ である。これと①、②より

$56 < d_{27} < 58$ であるから、 $d_{27} = 57$ となる。

Ⅲ

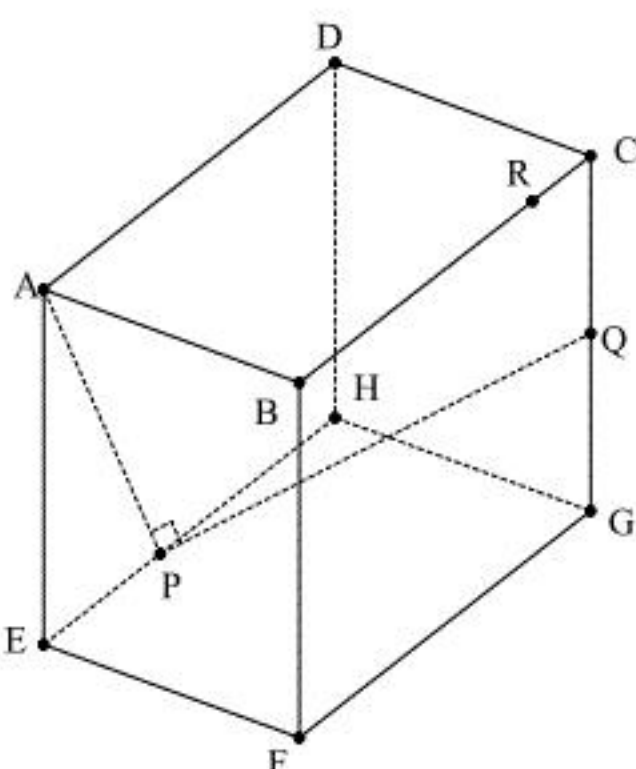
【解答】

(1)	14	15	16	17		
	5	2	9	2		
(2)	18	19	20	21	22	23
	1	1	7	5	1	6

【解説】

(1)

直方体 $ABCD-EFGH$ と点 P, Q, R を図示すると以下のようになる。



$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ とおくと, 実数 t を用いて $\overrightarrow{CQ}=t\vec{e}$ と表せる。このとき

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\vec{d}+\vec{e} \\ \overrightarrow{AQ}=\vec{b}+\vec{d}+t\vec{e} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\vec{d}+\vec{e} \\ \overrightarrow{PQ}=\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{d}+(t-1)\vec{e} \end{cases}$$

である。直線 AP, PQ は直交するから $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PQ}=0$ であり, 条件より

$$\begin{cases} \vec{b} \cdot \vec{d}=0 \\ \vec{d} \cdot \vec{e}=0 \\ \vec{e} \cdot \vec{b}=0 \\ |\vec{b}|=3 \\ |\vec{d}|=5 \\ |\vec{e}|=4 \end{cases}$$

が成立するから, 代入して

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\vec{d}+\vec{e}\right) \cdot \left(\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{d}+(t-1)\vec{e}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{6}{25}|\vec{d}|^2 + (t-1)|\vec{e}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 6+16(t-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} CQ &= |\overrightarrow{CQ}| \\ &= |t\vec{e}| \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2} \\ &= \sqrt{\left|\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{d}+\left(\frac{5}{8}-1\right)\vec{e}\right|^2} \\ &= \sqrt{|\vec{b}|^2 + \frac{9}{25}|\vec{d}|^2 + \frac{9}{64}|\vec{e}|^2} \\ &= \sqrt{18+\frac{9}{4}} \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

となる。

(2)

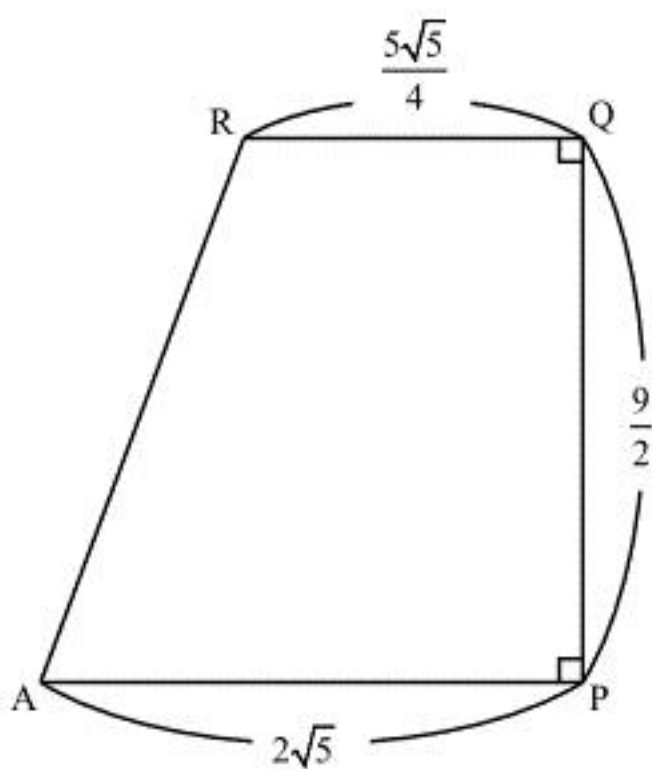
平面 APD と平面 RQC は平行であり, 4 点 A, P, R, Q が同一平面上にあることから, 辺 AP と辺 RQ は平行であるとわかる。よって, $\angle APE = \angle QRC$ であり, かつ $\angle AEP = \angle QCR = 90^\circ$ から, $\triangle AEP$ と $\triangle QCR$ は相似であり

$$\begin{aligned} AP:QR &= AE:QC \\ &= 4:\frac{5}{2} \\ &= 8:5 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{AE^2 + EP^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 2^2} \\ &= 2\sqrt{5} \\ QR &= \frac{5}{8}AP \\ &= \frac{5\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

となる。辺 AP と辺 RQ は平行であるから, $\angle PQR = 90^\circ$ である。したがって, 台形 $APQR$ の概形は以下のようになる。



以上から, 台形 $APQR$ の面積は

$$\begin{aligned} \frac{PQ}{2}(AP+QR) &= \frac{9}{4} \cdot \left(2\sqrt{5} + \frac{5\sqrt{5}}{4}\right) \\ &= \frac{117\sqrt{5}}{16} \end{aligned}$$

である。

IV

〔解答〕

(1)	24	25	26	27	28
	1	3	1	0	3
(2)	29	30	31	32	33
	2	3	－	1	9
(3)	34	35			
	9	4			

〔解説〕

(1)

$P_1(t, t^2)$ とおく。 C_1 の方程式 $y = x^2$ の両辺を x で微分すると $y' = 2x$ であるから、点 P_1 における C_1 の接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2t(x - t) + t^2 \\ \Leftrightarrow y &= 2tx - t^2 \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

と表せる。これと C_2 の方程式 $y = x^2 - 6x + 11$ から y を消去して連立すると

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 11 - 2tx + t^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2(t + 3)x + (t^2 + 11) &= 0 \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。①の接線と C_2 が接する場合、②の2次方程式が重解をもつ。したがって、②の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow (t + 3)^2 - (t^2 + 11) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。よって、 P_1 の x 座標は $\frac{1}{3}$ である。またこのとき、②に $t = \frac{1}{3}$ を代入すると

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{10}{3}\right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

となるから、 P_2 の x 座標は $\frac{10}{3}$ である。

(2)

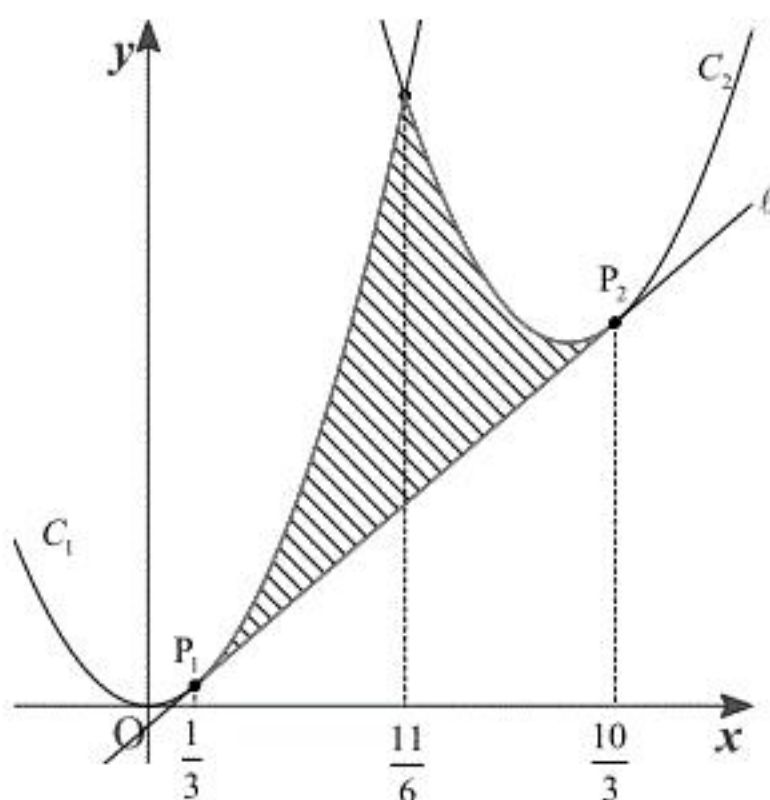
(1)より、直線 ℓ の方程式は $y = 2tx - t^2$ に $t = \frac{1}{3}$ を代入して $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}$ である。

(3)

C_1 と C_2 の交点の x 座標は、2 曲線の方程式から y を消去して連立し

$$\begin{aligned} x^2 - x^2 + 6x - 11 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{11}{6} \end{aligned}$$

となる。これと(1)、(2)より C_1, C_2, ℓ を図示すると以下のようになる。



求める面積は上図の斜線部の面積である。以上から、求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{11}{6}} \left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} \right) dx + \int_{\frac{11}{6}}^{\frac{10}{3}} \left(x^2 - 6x + 11 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} \right) dx \\ &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{11}{6}} \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 dx + \int_{\frac{11}{6}}^{\frac{10}{3}} \left(x - \frac{10}{3} \right)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{3} \right)^3 \right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{11}{6}} + \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{10}{3} \right)^3 \right]_{\frac{11}{6}}^{\frac{10}{3}} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{11}{6} - \frac{1}{3} \right)^3 - \frac{1}{3} \left(\frac{11}{6} - \frac{10}{3} \right)^3 \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

となる。