

【解答】

(1)	1	2	3	4
	5	0	5	0
(2)	5	6		
	4	9		
(3)	7	8	9	
	8	1	7	

【解説】

(1)

整数 x, y, z の満たす条件は、

$$\begin{cases} x \geq 0 & \cdots \textcircled{1} \\ y \geq 0 & \cdots \textcircled{2} \\ z \geq 0 & \cdots \textcircled{3} \\ x+y+z=99 & \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

である。このとき、 (x, y, z) は、99 個の $\bigcirc$ と、仕切りとして 2 個の $|$ を 1 列に並べたときの、仕切りごとの $\bigcirc$ の個数に対応する。 $\bigcirc$ と $|$ の並べ方の場合の数は、

$$\begin{aligned} {}_{99+2}C_2 &= \frac{101 \cdot 100}{1 \cdot 2} \\ &= 5050 \text{ (個)} \end{aligned}$$

であるから、 $\textcircled{1} \sim \textcircled{4}$ を満たすような整数の組 (x, y, z) は全部で 5050 個である。

(2)

$$\begin{cases} x=y=a \text{ (} a \text{ は } 0 \text{ 以上の整数)} & \cdots \textcircled{5} \\ y \neq z & \cdots \textcircled{6} \end{cases}$$

とする。 $\textcircled{1} \sim \textcircled{5}$ を満たすような整数の組 (x, y, z) を考える。 $\textcircled{4}$ 、 $\textcircled{5}$ より、

$$2a+z=99$$

である。 a, z はともに 0 以上の整数であるから、

$$0 \leq 2a \leq 99$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 49$$

となる。 a が定まると (x, y, z) は一意に定まるから、 $\textcircled{1} \sim \textcircled{5}$ を満たすような整数の組 (x, y, z) は全部で 50 個である。また、 $\textcircled{1} \sim \textcircled{5}$ を満たし、かつ $\textcircled{6}$ を満たさない整数の組 (x, y, z) は、

$$x=y=z \text{ かつ } x+y+z=99$$

$$\Leftrightarrow x=y=z=33$$

の 1 個である。したがって、 $\textcircled{1} \sim \textcircled{6}$ を満たすような整数の組 (x, y, z) は全部で

$$50-1=49 \text{ (個)}$$

である。

(3)

$\textcircled{1} \sim \textcircled{4}$ を満たすような整数の組 (x, y, z) の中で、 x, y, z の値が全て同じものは

$$x=y=z=33$$

の 1 個である。次に x, y, z の中で 2 個だけ値が同じ場合を考える。値が同じである 2 個の文字の組み合わせは、

$${}_3C_2=3 \text{ (通り)}$$

である。また(2)より、任意の 2 個の文字の値が同じとき、 (x, y, z) の組み合わせは 49 個であるから、 x, y, z の中で 2 個だけ値が同じ整数の組 (x, y, z) は

$$49 \cdot 3=147 \text{ (個)}$$

である。したがって、 $\textcircled{1} \sim \textcircled{4}$ を満たすような整数の組 (x, y, z) の中で、 x, y, z の値が全て異なるものは

$$5050-(1+147)=4902 \text{ (個)}$$

である。 x, y, z の値が全て異なる時、大小関係は全部で

$$3!=6 \text{ (通り)}$$

であり、全ての大小関係において (x, y, z) の組の個数は同じであるから、 $x < y < z$ を満たすような整数の組 (x, y, z) は

$$\frac{4902}{6}=817 \text{ (個)}$$

である。

II

〔解答〕

(1)	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$		
	3	8		
(2)	$\boxed{12}$	$\boxed{13}$	$\boxed{14}$	$\boxed{15}$
	2	5	3	2

〔解説〕

(1)

コイン投げで表が出ることを○、裏が出ることを×と表記する。また○,×となる確率はともに $\frac{1}{2}$ であることに注意する。ちょうど4回のコイン投げでゲームが終了するのは、4回のコイン投げで○と×がともに2回ずつであるときであり、この場合の数は、

$${}_4C_2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \\ = 6 \text{ (通り)}$$

である。したがって求める確率は

$$6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

である。

(2)

6回コインを投げてコマが頂点Sから頂点Gまで移動していないということは、○が1回以下、もしくは×が1回以下ということである。

[1] ○か×が1回のとき

6回のコイン投げで○が1回だけの場合の数は、

$${}_6C_1 = 6 \text{ (通り)}$$

である。×が1回だけの場合の数も同様であるから、この確率は

$$6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot 2 = \frac{3}{16}$$

である。

[2] ○か×が0回のとき

この確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot 2 = \frac{1}{32}$$

である。

以上、[1]、[2]より、求める確率は、

$$1 - \left(\frac{3}{16} + \frac{1}{32}\right) = \frac{25}{32}$$

である。

III

【解答】

(1)	16	17	18	19	20	21	22	23
	2	3	1	3	4	7	3	7
(2)	24	25	26	27	28	29	30	31
	1	5	2	5	2	5	5	7

【解説】

- (1) 点Dは辺ACを1:2に内分する点なので、

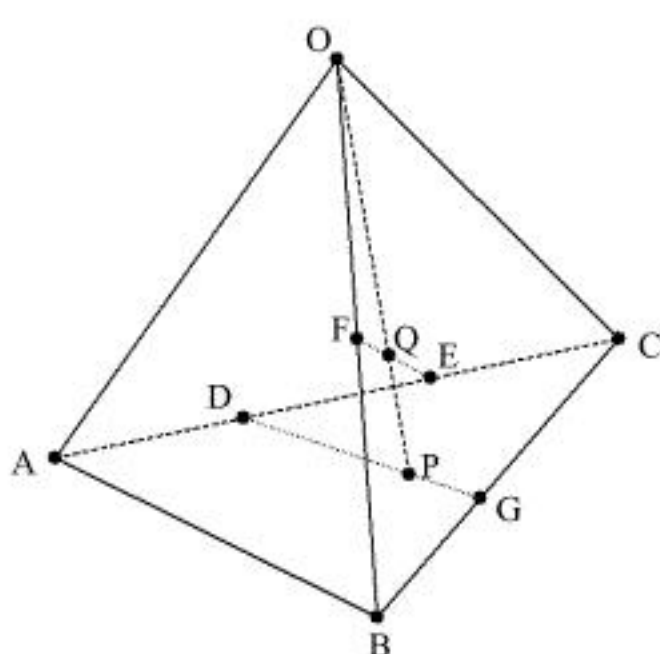
$$\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

である。同様に、点Gは辺BCを3:4に内分する点なので、

$$\overrightarrow{OG} = \frac{4}{7}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{OC}$$

である。

- (2) 四面体OABCと各点の位置は下図の通りである。



点Eは辺ACを2:1に内分する点なので、

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$$

であり、点Fは辺OBの中点なので、

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

である。また点Pは線分DGを $s:1-s$ ($0 < s < 1$)に内分し、点Qは線分EFを $t:1-t$ ($0 < t < 1$)に内分するとする。このとき、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= (1-s)\overrightarrow{OD} + s\overrightarrow{OG} \\ &= (1-s)\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\right) + s\left(\frac{4}{7}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{OC}\right) \\ &= \frac{2}{3}(1-s)\overrightarrow{OA} + \frac{4}{7}s\overrightarrow{OB} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{21}s\right)\overrightarrow{OC} \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= (1-t)\overrightarrow{OE} + t\overrightarrow{OF} \\ &= (1-t)\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}\right) + t\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{1}{3}(1-t)\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}t\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}(1-t)\overrightarrow{OC} \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

と表される。さらに3点O, P, Qが一直線上にあるから、ある実数 k を用いて

$$\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OP} \quad \dots\dots ③$$

と表される。③に①, ②を代入して

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(1-t)\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}t\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}(1-t)\overrightarrow{OC} &= k\left\{\frac{2}{3}(1-s)\overrightarrow{OA} + \frac{4}{7}s\overrightarrow{OB} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{21}s\right)\overrightarrow{OC}\right\} \\ \Leftrightarrow \left\{\frac{1}{3}(1-t) - \frac{2}{3}k(1-s)\right\}\overrightarrow{OA} + \left\{\frac{1}{2}t - \frac{4}{7}ks\right\}\overrightarrow{OB} + \left\{\frac{2}{3}(1-t) - k\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{21}s\right)\right\}\overrightarrow{OC} &= 0 \end{aligned}$$

を得る。 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ はそれぞれ一次独立なので、このとき

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(1-t) - \frac{2}{3}k(1-s) = 0 & \dots\dots ④ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}t - \frac{4}{7}ks = 0 & \dots\dots ⑤ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}(1-t) - k\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{21}s\right) = 0 & \dots\dots ⑥ \end{cases}$$

が成り立つ。⑤より $ks = \frac{7}{8}t$ であり、これを④, ⑥に代入して整理すると、

$$\begin{cases} 3t - 8k = -4 \\ 9t + 4k = 8 \end{cases}$$

と得る。これを解くと $t = \frac{4}{7}$, $k = \frac{5}{7}$ となり、⑤より $s = \frac{7}{10}$ と求まる。 s, k の値をそれぞれ①, ③

に代入して

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \frac{1}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OQ} &= \frac{5}{7}\overrightarrow{OP} \end{aligned}$$

となる。

IV

〔解答〕

32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
4	1	3	-	1	1	3	3	3	6

〔解説〕

$\int_0^1 \theta(t) dt = k$ とおくと, $\theta(t) = 6\pi t^2 + kt$ となるから,

$$k = \int_0^1 (6\pi t^2 + kt) dt$$

$$\Leftrightarrow k = \left[2\pi t^3 + \frac{1}{2}kt^2 \right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow k = 2\pi + \frac{k}{2}$$

$$\Leftrightarrow k = 4\pi$$

となる。点 $P(\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ が点 $A(1, 0)$ に戻ってくるのは,

$$\theta(t) = 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

のときである。ここで, $\theta(t) = 6\pi t^2 + 4t$ は $t \geq 0$ において連続な増加関数だから, P が n 回目に A に戻ってくる時刻を $t = T_n$ とするとき,

$$\theta(T_n) = 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

が成り立つ。 $\theta(T_n) = 6\pi T_n^2 + 4\pi T_n$ だから,

$$6\pi T_n^2 + 4\pi T_n = 2\pi n$$

$$\Leftrightarrow 6\pi T_n^2 + 4\pi T_n - 2\pi n = 0$$

$$\Leftrightarrow 3T_n^2 + 2T_n - n = 0$$

$$\therefore T_n = \frac{-1 + \sqrt{1+3n}}{3} \quad (\because T_n > 0)$$

である。このとき $T_1 = \frac{-1 + \sqrt{1+3 \cdot 1}}{3} = \frac{1}{3}$ である。さらに,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(T_n - T_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\frac{-1 + \sqrt{1+3n}}{3} - \frac{-1 + \sqrt{1+3(n-1)}}{3} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\frac{\sqrt{1+3n} - \sqrt{1+3(n-1)}}{3} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left[\frac{(1+3n) - \{1+3(n-1)\}}{3(\sqrt{1+3n} + \sqrt{1+3(n-1)})} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left\{ \frac{3}{3(\sqrt{1+3n} + \sqrt{1+3(n-1)})} \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+3n} + \sqrt{3n-2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n} + 3} + \sqrt{3 - \frac{2}{n}}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}$$

となる。

〔解答〕

(1)	42	43	44	45	46	47
	3	3	4	−	1	2
(2)	48	49	50	51	52	
	−	1	3	1	4	

〔解説〕

(1)

$$f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sqrt{1-x^2} + (1-x) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\sqrt{1-x^2} - \frac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\frac{(1-x^2) + x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{(2x+1)(x-1)}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

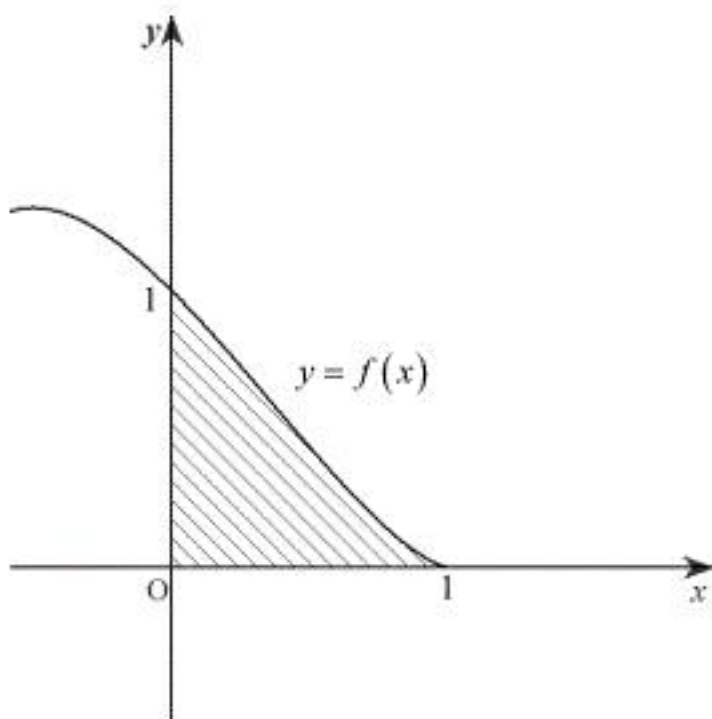
であるから、 $-1 \leq x \leq 1$ における増減表は以下の通りである。

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

上表より、関数 $f(x)$ の $-1 \leq x \leq 1$ における最大値は $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ であり、そのときの x の値は $-\frac{1}{2}$ である。

(2)

曲線 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 1$)、 x 軸、 y 軸で囲まれる部分は下図の斜線部の領域である。



この領域の面積を S とすると、

$$S = \int_0^1 (1-x)\sqrt{1-x^2} dx$$

である。ここで $x = \sin \theta$ と置換すると、 $dx = \cos \theta d\theta$ であり、 x と θ の対応は下表の通りである。

x	0	$\rightarrow$	1
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

したがって、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) \sqrt{\cos^2 \theta} \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) |\cos \theta| \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) \cos^2 \theta d\theta \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta - \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3} \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \pi \end{aligned}$$

となる。