

〔解答〕

ア	イ
$\frac{5}{108}$	$\frac{85}{1296}$

〔解説〕

(1)

さいころを4回投げるとき、出目の総数は

$$6^4 \text{ (通り)}$$

である。同じ目がちょうど3回だけ続けて出るとき、

[1] 1回目、2回目、3回目に同じ目が続けて出る場合

[2] 2回目、3回目、4回目に同じ目が続けて出る場合

の2つの場合が考えられる。[1]では4回目に、[2]では1回目に、3回続けて出る目とは異なる目が出なければならない。よって、目の出方はそれぞれ

$$(6 \cdot 1 \cdot 1) \cdot 5 = 30 \text{ (通り)}$$

である。したがって、求める確率は

$$\frac{30 \cdot 2}{6^4} = \frac{5}{108}$$

である。

(2)

さいころを5回投げるとき、出目の総数は

$$6^5 \text{ (通り)}$$

である。ここで、同じ目がちょうど3回だけ続けて出るときの場合の数を、以下のように場合分けして考える。

[1] 1回目、2回目、3回目に同じ目が続けて出る場合

4回目には、3回続けて出る目とは異なる目が出なければならない。また、5回目には、どの目が出てもよい。よって、目の出方は

$$(6 \cdot 1 \cdot 1) \cdot 5 \cdot 6 = 180 \text{ (通り)}$$

である。

[2] 2回目、3回目、4回目に同じ目が続けて出る場合

1回目、5回目ともに3回続けて出る目とは異なる目が出なければならない。よって、目の出方は

$$5 \cdot (6 \cdot 1 \cdot 1) \cdot 5 = 150 \text{ (通り)}$$

である。

[3] 3回目、4回目、5回目に同じ目が続けて出る場合

1回目には、どの目が出てもよい。また、2回目には、3回続けて出る目とは異なる目が出なければならない。よって、目の出方は

$$6 \cdot 5 \cdot (6 \cdot 1 \cdot 1) = 180 \text{ (通り)}$$

である。

以上、[1]、[2]、[3]より、求める確率は

$$\frac{180 + 150 + 180}{6^5} = \frac{85}{1296}$$

である。

〔解答〕

ウ	エ	オ	カ
$\frac{60}{7}$	$\frac{11}{7}$	$-\frac{20}{21}$	$\frac{5\sqrt{33}}{7}$

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \\
 &= 3 \cdot 5 \cdot \frac{4}{7} \\
 &= \frac{60}{7}
 \end{aligned}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned}
 (2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) &= 2|\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{b}|^2 \\
 &= 2 \cdot 3^2 + \frac{60}{7} - 5^2 \\
 &= \frac{11}{7}
 \end{aligned}$$

である。

(3)

$$\begin{aligned}
 |\vec{u}|^2 &= |t\vec{a} + \vec{b}|^2 \\
 &= t^2 |\vec{a}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\
 &= 9t^2 + \frac{120}{7}t + 25 \\
 &= 9\left(t + \frac{20}{21}\right)^2 + \frac{825}{49}
 \end{aligned}$$

より、 $|\vec{u}|^2$ は $t = -\frac{20}{21}$ のとき、最小値 $\frac{825}{49}$ をとる。 $|\vec{u}|^2 \geq 0$ であるから、このとき $|\vec{u}|$ も最小と

なる。したがって、 $|\vec{u}|$ は $t = -\frac{20}{21}$ のとき、最小値 $\sqrt{\frac{825}{49}} = \frac{5\sqrt{33}}{7}$ をとる。

(1)

直線 l_a, l_b の方程式はそれぞれ

$$\begin{cases} l_a: (1-a)x + (1+a)y + a^2 = 0 & \dots \textcircled{1} \\ l_b: (1-b)x + (1+b)y + b^2 = 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

となるから、直線 l_a と直線 l_b が直交するための条件は

$$\begin{aligned} (1-a)(1-b) + (1+a)(1+b) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 + 2ab &= 0 \\ \Leftrightarrow ab &= -1 \end{aligned}$$

である。

(答) $ab = -1$

(2)

①, ②の2式から、まず y を消去して交点 P の x 座標を求める。① $\cdot(1+b)$ - ② $\cdot(1+a)$ より

$$\begin{aligned} (1-a)(1+b)x + a^2(1+b) - (1+a)(1-b)x - b^2(1+a) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2b-2a)x &= b^2 - a^2 + ab^2 - a^2b \\ \Leftrightarrow 2(b-a)x &= (b+a)(b-a) + ab(b-a) \end{aligned}$$

である。ここで、実数 a, b が(1)の条件 $ab = -1$ を満たすとき

$$a \neq b \Leftrightarrow b-a \neq 0$$

である。よって、両辺を $2(b-a)$ で割ると

$$x = \frac{1}{2} \left(a + ab + b \right)$$

となる。 $ab = -1$ より、 $b = -\frac{1}{a}$ であるから、これを代入して b を消去すると

$$x = \frac{1}{2} \left(a - 1 - \frac{1}{a} \right)$$

となる。次に x を消去して交点 P の y 座標を求める。① $\cdot(1-b)$ - ② $\cdot(1-a)$ より

$$\begin{aligned} (1+a)(1-b) + a^2(1-b) - (1-a)(1+b)y - b^2(1-a) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2a-2b)y &= -a^2 + b^2 + a^2b - ab^2 \\ \Leftrightarrow 2(a-b)y &= -(a+b)(a-b) + ab(a-b) \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{1}{2}(a - ab + b) \quad (\because a-b \neq 0) \\ \therefore y &= -\frac{1}{2} \left(a + 1 - \frac{1}{a} \right) \quad \left(\because b = -\frac{1}{a} \right) \end{aligned}$$

となる。したがって、交点 P の座標は

$$\left(\frac{1}{2} \left(a - 1 - \frac{1}{a} \right), -\frac{1}{2} \left(a + 1 - \frac{1}{a} \right) \right)$$

と表される。

(答) $\left(\frac{1}{2} \left(a - 1 - \frac{1}{a} \right), -\frac{1}{2} \left(a + 1 - \frac{1}{a} \right) \right)$

(3)

$P(X, Y)$ とすると、(2)の結果より

$$\begin{cases} X = \frac{1}{2} \left(a - 1 - \frac{1}{a} \right) \\ Y = -\frac{1}{2} \left(a + 1 - \frac{1}{a} \right) \end{cases}$$

である。辺々足して a を消去すると

$$\begin{aligned} X + Y &= -1 \\ \Leftrightarrow X + Y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

となるから、点 P は直線 $x + y + 1 = 0$ 上にある。逆に、直線 $x + y + 1 = 0$ 上の任意の点は、条件を満たす。したがって、求める軌跡は直線 $x + y + 1 = 0$ である。

(答) 直線 $x + y + 1 = 0$

(1)

点 $A(-1, -3)$ を通り、傾きが m である直線の方程式は、

$$y+3=m(x+1)$$

$$\Leftrightarrow y=mx+m-3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

と表される。①と放物線 C の方程式から y を消去して整理すると、

$$x^2-2x+3=mx+m-3$$

$$\Leftrightarrow x^2-(m+2)x-m+6=0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。いま、この直線が放物線 C の接線であるとする、この2次方程式の判別式 D は、

$D=0$ を満たす。すなわち、

$$(m+2)^2-4(-m+6)=0$$

$$\Leftrightarrow m^2+8m-20=0$$

$$\Leftrightarrow (m+10)(m-2)=0$$

$$\therefore m=-10, 2$$

となる。したがって、点 A から放物線 C に引いた2本の接線の方程式は①より

$$y=-10x-13, y=2x-1$$

である。

(答) $y=-10x-13, y=2x-1$

(2)

$m=-10$ のとき、②を解くと

$$x^2+8x+16=0$$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2=0$$

$$\therefore x=-4$$

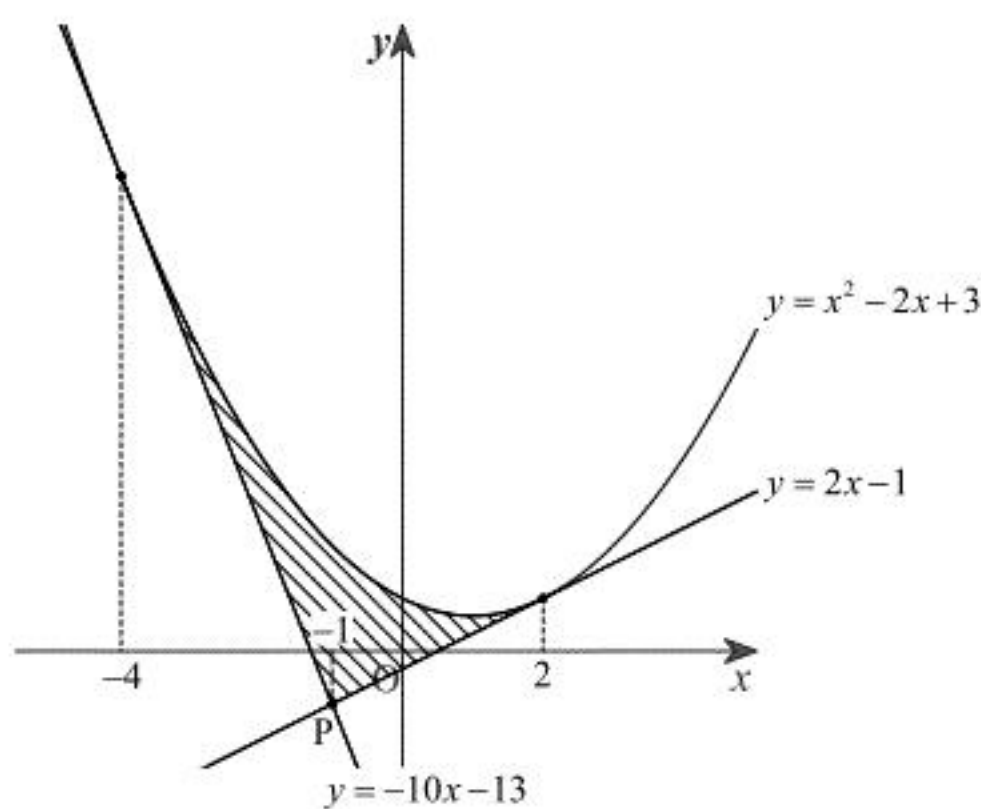
となる。また、 $m=2$ のとき、②を解くと

$$x^2-4x+4=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2=0$$

$$\therefore x=2$$

となる。したがって、放物線 C が(1)の2本の接線と接する点の x 座標はそれぞれ $-4, 2$ である。



放物線 C と(1)の2本の接線で囲まれる部分は上図の斜線部であるから、その面積を S とすると、

$$S = \int_{-4}^{-1} \{(x^2-2x+3)-(-10x-13)\} dx + \int_{-1}^2 \{(x^2-2x+3)-(2x-1)\} dx$$

$$= \int_{-4}^{-1} (x^2+8x+16) dx + \int_{-1}^2 (x^2-4x+4) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 16x \right]_{-4}^{-1} + \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x \right]_{-1}^2$$

$$= 9 + 9$$

$$= 18$$

である。

(答) 18