

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ
$\left(\frac{1}{4}\right)^n$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$	$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^n$

〔解説〕

(1)

操作を n 回行った後、表が上になっているコインが2枚であるのは、操作を1回行った後、表が上になっているコインが2枚であるという事象が n 回連続で起こるときであるから、その確率は、

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

である。

(2)

操作を $n+1$ 回行った後、表が上になっているコインが1枚であるのは、操作を n 回行った後、表が上になっているコインが2枚であり、 $n+1$ 回目の操作で1枚だけ裏が上になるとき、または、操作を n 回行った後、表が上になっているコインが1枚であり、 $n+1$ 回目の操作で投げたコインの表が上であるときである。これら2つの事象は排反であるから、その確率 b_{n+1} は、

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_n \cdot \frac{1}{2} + b_n \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{aligned}$$

である。よって、両辺に 2^{n+1} をかけて整理すると、

$$2^{n+1} b_{n+1} - 2^n b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

となる。このとき、 $b_1 = \frac{1}{2}$ より、数列 $\{2^n b_n\}$ は初項 $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ 、階差数列が $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ の数列であるから、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} 2^n b_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2 \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} \\ \therefore b_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

となる。 $n=1$ のときも $b_1 = \frac{1}{2^0} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ となり上式を満たすから $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ である。

(3)

n 回以下の操作によって、すべてのコインの裏が上になる事象の余事象は、操作を n 回行った後、表が上になっているコインが1枚または2枚である事象であり、その確率は $b_n + a_n$ である。したがって、求める確率は、

$$\begin{aligned} 1 - (b_n + a_n) &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} - \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{aligned}$$

である。

〔解答〕

オ	カ	キ
$\frac{2}{7}$	$12\sqrt{5}$	$45\sqrt{5}$

〔解説〕

(1)

△OABについて余弦定理より,

$$\begin{aligned}\cos \angle AOB &= \frac{7^2 + 8^2 - 9^2}{2 \cdot 7 \cdot 8} \\ &= \frac{2}{7}\end{aligned}$$

である。

(2)

 $0 < \angle AOB < \pi$ より, $\sin \angle AOB > 0$ であるから,

$$\begin{aligned}\sin \angle AOB &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle AOB} \\ &= \frac{3\sqrt{5}}{7}\end{aligned}$$

である。よって, 求める面積を S とすると,

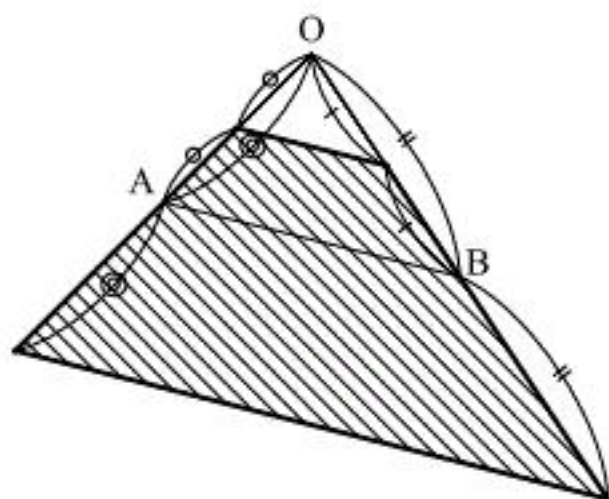
$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB \\ &= \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{7} \\ &= 12\sqrt{5}\end{aligned}$$

である。

(3)

 $s+t=k$ ($\frac{1}{2} \leq k \leq 2$) のとき, $\frac{s}{k} + \frac{t}{k} = 1$ であり,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{s}{k} \cdot k\overrightarrow{OA} + \frac{t}{k} \cdot k\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

と表される。したがって, $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OB}$ で表される点を C, D とすると, $s \geq 0$, $t \geq$ 0 を満たしながら変化するとき, 点 P は線分 CD 上を動く。次に k が $\frac{1}{2} \leq k \leq 2$ の範囲で変化すると, 点 P は下図の斜線部分の領域内を動く。

したがって, 求める領域の面積は相似比から,

$$\begin{aligned}2^2 S - \left(\frac{1}{2}\right)^2 S &= \frac{15}{4} S \\ &= 45\sqrt{5}\end{aligned}$$

である。

(1)

C_1, C_2 はともに原点を通るから 2 円の交点は O と P である。このとき、2 円 C_1, C_2 の中心をそれぞれ A, B とすると、直線 AB は線分 OP の垂直二等分線である。また、線分 AB の長さが

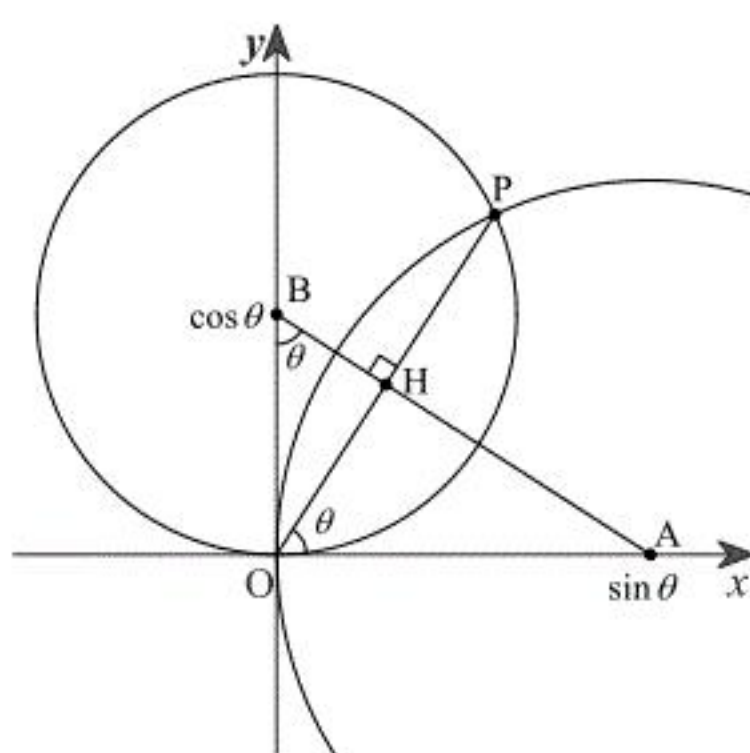
$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

であるから、

$$\sin \angle OBA = \frac{OA}{AB} = \sin \theta$$

$$\cos \angle OBA = \frac{OB}{AB} = \cos \theta$$

とわかる。したがって、 $\angle OBA = \theta$ となり、 C_1, C_2 および A, B, P を図示すると下図のようになる。



よって、線分 OP の中点を H とすると、

$$\begin{aligned} OH &= OA \cos \theta \\ &= \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} OP &= 2OH \\ &= 2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

であるから、 P の座標は、

$$(OP \cos \theta, OP \sin \theta) = (2 \sin \theta \cos^2 \theta, 2 \sin^2 \theta \cos \theta)$$

となる。

(答) $P(2 \sin \theta \cos^2 \theta, 2 \sin^2 \theta \cos \theta)$

(2)

(1)の結果と倍角の公式より、

$$\begin{aligned} OP &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= \sin 2\theta \end{aligned}$$

である。したがって、 θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 、つまり $0 < 2\theta < \pi$ の範囲を動くとき、 OP は $2\theta = \frac{\pi}{2}$ 、つ

まり $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき最大値 1 をとる。

(答) 1

(3)

P の x 座標を P_x とすると、

$$\begin{aligned} P_x &= 2 \sin \theta \cos^2 \theta \\ &= 2 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) \\ &= -2 \sin^3 \theta + 2 \sin \theta \end{aligned}$$

と表される。ここで、 $t = \sin \theta$ とおくと、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より、 $0 < t < 1$ であり、

$$\begin{aligned} P_x &= -2t^3 + 2t \\ \frac{dP_x}{dt} &= -6t^2 + 2 = -6 \left(t - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(t + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

であるから、 P_x の増減は以下の通りである。

t	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	1
$\frac{dP_x}{dt}$		+	0	-	
P_x		↗	極大	↘	

したがって、 P_x の最大値は、 $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき、

$$-2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^3 + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

である。

(答) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

(1)

$$f'(x) = 3e^x - 3e^{3x} = 3e^x(1 - e^{2x})$$

$$f''(x) = 3e^x - 9e^{3x} = 3e^x(1 - 3e^{2x})$$

より,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f''(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 3e^{2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \log 3$$

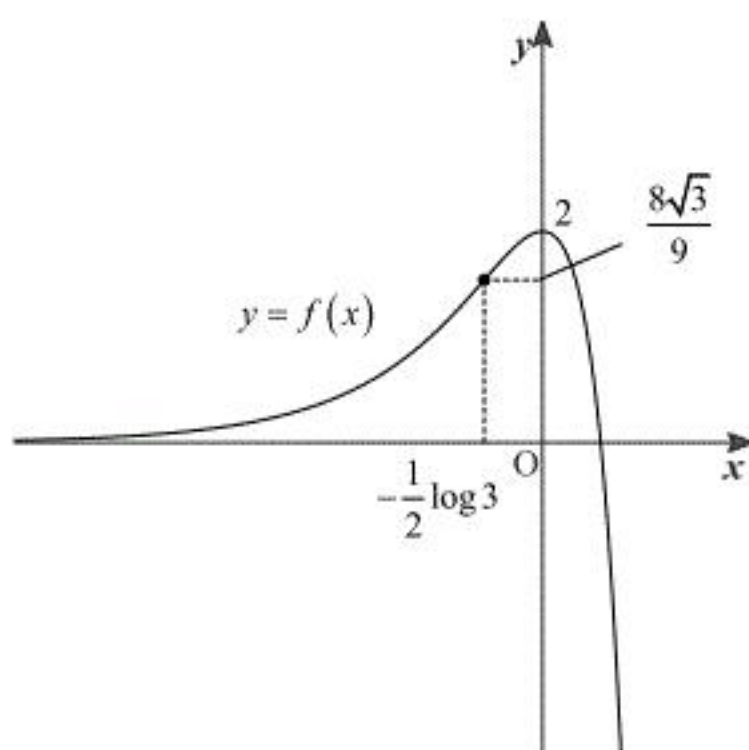
である。さらに,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x (3 - e^{2x}) = 0 \cdot (3 - 0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{3x} (3e^{-2x} - 1) = -\infty$$

であることから, $f(x)$ の増減と凹凸は以下の通りである。

x	$(-\infty)$	$\cdots$	$-\frac{1}{2} \log 3$	$\cdots$	0	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		+	+	+	0	-	
$f''(x)$		+	0	-	-	-	
$f(x)$	(0)	↗	変曲点	↘	極大	↘	$(-\infty)$

したがって, $f(x)$ は $x=0$ のとき極大値 $f(0)=2$ をとり, 極小値はもたない。また,
 $f\left(-\frac{1}{2} \log 3\right) = \frac{8\sqrt{3}}{9}$ より, 変曲点は $\left(-\frac{1}{2} \log 3, \frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$ である。以上より, グラフの概形は以下の通りである。
(答) 増減: $x \leq 0$ で単調増加し, $x \geq 0$ で単調減少する凹凸: $x \leq -\frac{1}{2} \log 3$ で下に凸, $x \geq -\frac{1}{2} \log 3$ で上に凸極大値: 2 ($x=0$ のとき), 極小値: なし変曲点: $\left(-\frac{1}{2} \log 3, \frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$, 概形: 上図

(2)

$$I = \int_0^t f(x) dx \text{ より, } \frac{dI}{dt} = f(t) \text{ であり,}$$

$$f(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^t (3 - e^{2t}) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2t} = 3 \quad (\because e^t > 0)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \log 3$$

であるから, (1)より I の増減は以下の通りである。

t	$(-\infty)$	$\cdots$	$\frac{1}{2} \log 3$	$\cdots$	(∞)
$\frac{dI}{dt}$		+	0	-	
I		↗	最大	↘	$(-\infty)$

よって, I は $t = \frac{1}{2} \log 3$ のとき最大値,

$$I = \int_0^{\frac{1}{2} \log 3} f(x) dx$$

$$= \left[3e^x - \frac{1}{3} e^{3x} \right]_0^{\frac{1}{2} \log 3}$$

$$= 2\sqrt{3} - \frac{8}{3}$$

をとり, 最小値は存在しない。

(答) 最大値: $2\sqrt{3} - \frac{8}{3}$, 最小値: なし

(1)

$0 \leq x \leq \pi$ において、 $x \sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pi$ であり、 $x \geq 0, \sin x \geq 0$ より $x \sin x \geq 0$ である。
したがって、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{\pi} x \sin x dx \\ &= [-x \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x) dx \\ &= [-x \cos x + \sin x]_0^{\pi} \\ &= \pi \end{aligned}$$

となる。

(答) π

(2)

$k = 2m$ ($m = 1, 2, \dots$)のとき、 $k\pi \leq x \leq (k+1)\pi$ において $x \geq 0, \sin x \geq 0$ である。したがって、求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x \sin x dx &= [-x \cos x + \sin x]_{k\pi}^{(k+1)\pi} \\ &= (k+1)\pi - (-k\pi) \\ &= (2k+1)\pi \end{aligned}$$

である。

(答) $(2k+1)\pi$

(3)

$k = 2m+1$ ($m = 1, 2, \dots$)のとき、 $k\pi \leq x \leq (k+1)\pi$ において $x \geq 0, \sin x \leq 0$ である。したがって、求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} (-x \sin x) dx &= [x \cos x - \sin x]_{k\pi}^{(k+1)\pi} \\ &= (k+1)\pi - (-k\pi) \\ &= (2k+1)\pi \end{aligned}$$

である。

(答) $(2k+1)\pi$

(4)

(3)は $m=0$ のときも成立する。したがって、(1), (2), (3)より、すべての0以上の整数について、 $k\pi \leq x \leq (k+1)\pi$ と x 軸によって囲まれる部分の面積は、 $(2k+1)\pi$ である。したがって、 S_n は、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)\pi \\ &= \frac{1}{2}n\{1+(2n-1)\}\pi \\ &= n^2\pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $n^2\pi$