

【解答】

(1)	1	2	3	4	5
	3	2	5	1	2
(2)	6	7	8		
	3	2	5		
(3)	9	10	11		
	2	1	2		

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(e^{3x} \sin 2x) &= 3e^{3x} \cdot \sin 2x + e^{3x} \cdot 2 \cos 2x \\
 &= e^{3x} (3 \sin 2x + 2 \cos 2x) \\
 \frac{d^2}{dx^2}(e^{3x} \sin 2x) &= \frac{d}{dx} \{ e^{3x} (3 \sin 2x + 2 \cos 2x) \} \\
 &= 3e^{3x} (3 \sin 2x + 2 \cos 2x) + e^{3x} (6 \cos 2x - 4 \sin 2x) \\
 &= e^{3x} (5 \sin 2x + 12 \cos 2x)
 \end{aligned}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{1}{3}}^3 (3x-1)^{\frac{2}{3}} dx &= \left[\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} (3x-1)^{\frac{5}{3}} \right]_{\frac{1}{3}}^3 \\
 &= \frac{1}{5} \cdot 8^{\frac{5}{3}} \\
 &= \frac{32}{5}
 \end{aligned}$$

である。

(3)

$\sqrt{x+1}=t$ とすると、 $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}dx=dt$ であり、 x と t は下表のように対応する。

x	1	$\rightarrow$	5
t	$\sqrt{2}$	$\rightarrow$	$\sqrt{6}$

また

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= 2t \\
 \therefore dx &= 2t dt
 \end{aligned}$$

となる。よって

$$\int_1^5 \frac{1}{(x+3)\sqrt{x+1}} dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \frac{2}{t^2+2} dt$$

となる。ここで $t=\sqrt{2} \tan \theta$ とすると、 $dt=\frac{\sqrt{2}}{\cos^2 \theta} d\theta$ であり、 t と θ は下表のように対応する。

t	$\sqrt{2}$	$\rightarrow$	$\sqrt{6}$
θ	$\frac{\pi}{4}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{3}$

したがって、求める値は

$$\begin{aligned}
 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \frac{2}{t^2+2} dt &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{2 \tan^2 \theta + 2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cos^2 \theta} d\theta \\
 &= \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \\
 &= \sqrt{2} \left[\theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{12} \pi
 \end{aligned}$$

である。

〔解答〕

(1)	12	13	14	15	16
	－	3	5	4	5
(2)	17	18	19	20	
	4	7	1	5	
(3)	21	22	23	24	
	1	4	2	5	

〔解説〕

(1)

3点 A, B, C は中心が点 O, 半径が 1 の円周上の点であるから, $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1$ である。

ここで与えられた関係式を変形すると

$$\begin{aligned} 7\overrightarrow{OA} &= 15\overrightarrow{OB} + 20\overrightarrow{OC} \\ \Leftrightarrow 7\overrightarrow{OA} - 15\overrightarrow{OB} &= 20\overrightarrow{OC} \\ \therefore |7\overrightarrow{OA} - 15\overrightarrow{OB}| &= |20\overrightarrow{OC}| \end{aligned}$$

であり, 両辺を 2 乗して整理して

$$\begin{aligned} 49|\overrightarrow{OA}|^2 - 210\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 225|\overrightarrow{OB}|^2 &= 400|\overrightarrow{OC}|^2 \\ \Leftrightarrow 210\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= -126 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

となる。同様に

$$\begin{aligned} 7\overrightarrow{OA} - 20\overrightarrow{OC} &= 15\overrightarrow{OB} \\ \therefore |7\overrightarrow{OA} - 20\overrightarrow{OC}| &= |15\overrightarrow{OB}| \end{aligned}$$

であり, 両辺を 2 乗して整理して

$$\begin{aligned} 49|\overrightarrow{OA}|^2 - 280\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + 400|\overrightarrow{OC}|^2 &= 225|\overrightarrow{OB}|^2 \\ \Leftrightarrow 280\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} &= 224 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

となる。

(2)

点 D は直線 OA 上の点であるから, p を実数として

$$\overrightarrow{OD} = p\overrightarrow{OA} \quad \dots\dots ①$$

とおける。また, 点 D は直線 BC 上の点でもあるから, q を実数として

$$\overrightarrow{OD} = q\overrightarrow{OB} + (1-q)\overrightarrow{OC} \quad \dots\dots ②$$

とおける。よって①, ②より,

$$p\overrightarrow{OA} = q\overrightarrow{OB} + (1-q)\overrightarrow{OC} \quad \dots\dots ③$$

となる。ここで, 与えられた関係式を変形すると

$$\begin{aligned} 7\overrightarrow{OA} &= 15\overrightarrow{OB} + 20\overrightarrow{OC} \\ \Leftrightarrow 7\overrightarrow{OA} &= 35 \cdot \left(\frac{3}{7}\overrightarrow{OB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{OC} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{5}\overrightarrow{OA} &= \frac{3}{7}\overrightarrow{OB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{OC} \quad \dots\dots ④ \end{aligned}$$

となる。したがって, $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ は一次独立であるから, ③, ④より

$$(p, q) = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{7} \right) \quad \dots\dots ⑤$$

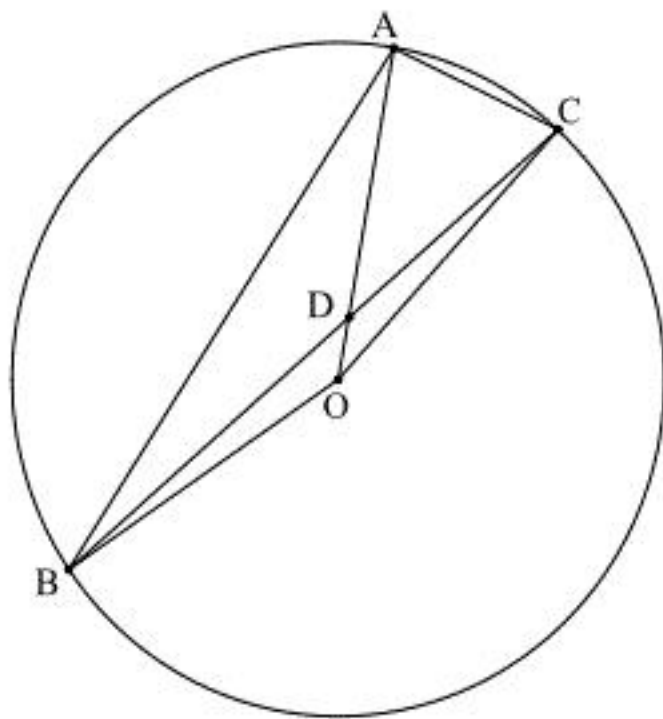
を得る。よって①, ②, ⑤より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BD} &= \frac{4}{7}\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{OD} &= \frac{1}{5}\overrightarrow{OA} \end{aligned}$$

である。

(3)

三角形 ABC とその外接円および点 D を図示すると下図のようになる。



三角形 ABC の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= (\text{三角形 DAB の面積}) + (\text{三角形 DAC の面積}) \\ &= \frac{4}{5} \{ (\text{三角形 OAB の面積}) + (\text{三角形 OAC の面積}) \} \\ &= \frac{4}{5} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} + \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OC}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC})^2} \right\} \\ &= \frac{2}{5} \left\{ \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5} \right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5} \right)^2} \right\} \\ &= \frac{14}{25} \end{aligned}$$

である。

3

(1)

$f(t) = \cos t + |\sin t|$, $g(t) = |\cos t| + \sin t$ とおくと、点 P の座標は $P(f(t), g(t))$ となる。

$$\begin{aligned} (f(0), g(0)) &= (1, 1) \\ \left(f\left(\frac{\pi}{2}\right), g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) &= (1, 1) \\ (f(\pi), g(\pi)) &= (-1, 1) \\ \left(f\left(\frac{3\pi}{2}\right), g\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) &= (1, -1) \\ (f(2\pi), g(2\pi)) &= (1, 1) \end{aligned}$$

であるから、点 P の座標は $t=0, \frac{\pi}{2}, 2\pi$ のとき $(1, 1)$ 、 $t=\pi$ のとき $(-1, 1)$ 、 $t=\frac{3\pi}{2}$ のとき $(1, -1)$ である。

$$(\text{答}) \quad t=0, \frac{\pi}{2}, 2\pi: (1, 1), t=\pi: (-1, 1), t=\frac{3\pi}{2}: (1, -1)$$

(2)

$0 \leq t \leq 2\pi$ のときを考える。

$$\begin{aligned} 0 \leq t < \pi \text{ のとき } |\sin t| &= \sin t \\ \pi \leq t < 2\pi \text{ のとき } |\sin t| &= -\sin t \\ 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi \text{ のとき } |\cos t| &= \cos t \\ \frac{\pi}{2} \leq t < \frac{3\pi}{2} \text{ のとき } |\cos t| &= -\cos t \end{aligned}$$

であるから、 $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \leq t < \pi$, $\pi \leq t < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi$ の4つの範囲に場合分けして考える。

[1] $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$ のとき

点 P $(\cos t + \sin t, \cos t + \sin t)$ より、点 P は直線 $y=x$ 上を動く。ここで、

$$\cos t + \sin t = \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

であり、 $\frac{\pi}{4} \leq t + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$ であるから

$$\begin{aligned} 1 &\leq \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow 1 &\leq x \leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

より点 P は直線 $y=x$ 上の $1 \leq x \leq \sqrt{2}$ の範囲を動く。

[2] $\frac{\pi}{2} \leq t < \pi$ のとき

$$\begin{aligned} x &= \cos t + \sin t \\ &= \sqrt{2} \left(\cos t \cos \frac{\pi}{4} + \sin t \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \\ y &= -\cos t + \sin t \\ &= \sqrt{2} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

より、点 P は円 $x^2 + y^2 = 2$ 上を動く。ここで、 $\frac{\pi}{4} \leq t - \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$ より、点 P は原点を中心とする半径が $\sqrt{2}$ の円周上を点 $(1, 1)$ から点 $(-1, 1)$ まで反時計回りに動く(ただし、点 $(-1, 1)$ は含まない)。

[3] $\pi \leq t < \frac{3\pi}{2}$ のとき

点 P $(\cos t - \sin t, -\cos t + \sin t)$ より、点 P は直線 $y=-x$ 上を動く。ここで、

$$\cos t - \sin t = -\sqrt{2} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

であり、 $\frac{3\pi}{4} \leq t - \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4}$ であるから

$$-1 \leq -\sqrt{2} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) < 1$$

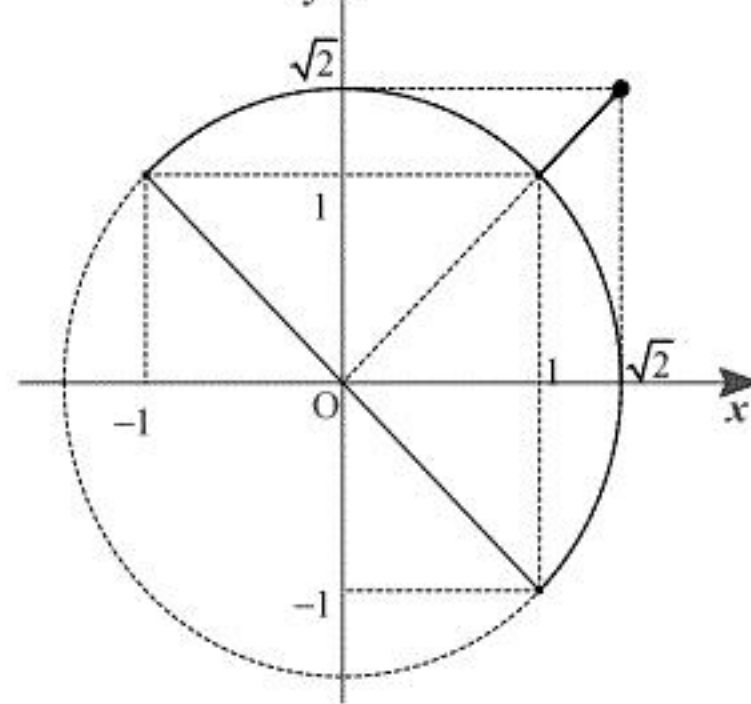
より点 P は直線 $y=-x$ 上の $-1 \leq x < 1$ の範囲を動く。

[4] $\frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi$ のとき

$$\begin{aligned} x &= \cos t - \sin t \\ &= \sqrt{2} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \\ y &= \cos t + \sin t \\ &= \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

より、点 P は円 $x^2 + y^2 = 2$ 上を動く。ここで、 $\frac{7\pi}{4} \leq t + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9\pi}{4}$ より、点 P は原点を中心とする半径が $\sqrt{2}$ の円周上を点 $(1, -1)$ から点 $(1, 1)$ まで反時計回りに動く。

以上、[1]~[4]より、点 P の軌跡を図示すると下図の実線部分のようになる。



(答) 前図

(3)

(2)と同様に $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \leq t < \pi$, $\pi \leq t < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi$ の4つの範囲に場合分けして考える。

[1] $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$ のとき

(2)より点 P は直線 $y=x$ 上の $1 \leq x \leq \sqrt{2}$ の範囲を動く。点 P の x 座標は $x = \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$

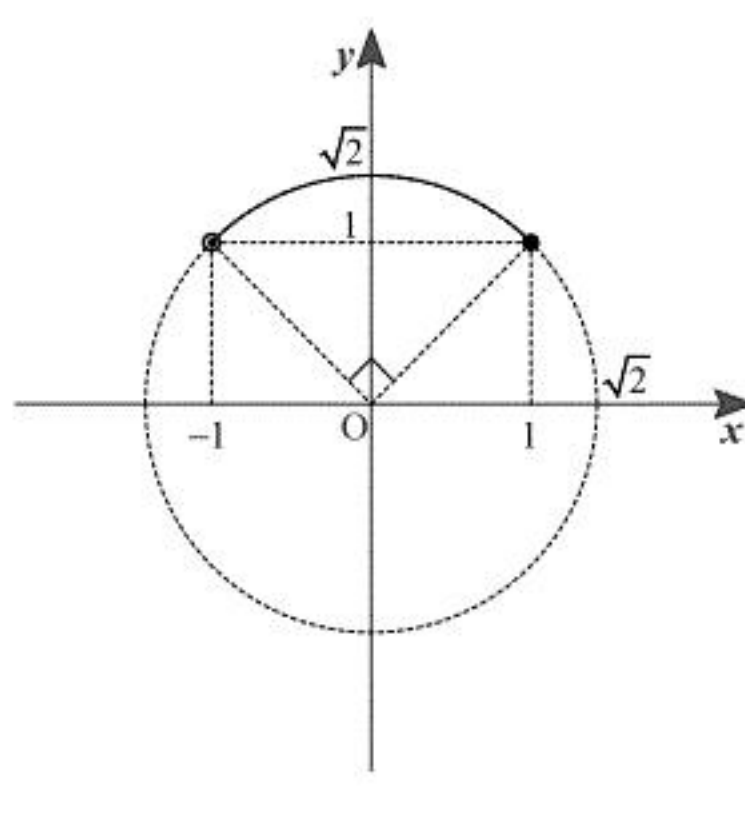
であるから、点 P は直線 $y=x$ 上を点 $(1, 1)$ と点 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ を結ぶ線分上を1往復する。よって、この範囲での道のりは

$$2\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2 + (\sqrt{2}-1)^2} = 4-2\sqrt{2}$$

である。

[2] $\frac{\pi}{2} \leq t < \pi$ のとき

(2)より点 P は原点を中心とする半径が $\sqrt{2}$ の円周上を点 $(1, 1)$ から点 $(-1, 1)$ まで反時計回りに動く(ただし、点 $(-1, 1)$ は含まない)。つまり、下図の実線部分を動く。



よって、この範囲での道のりは

$$2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

である。

[3] $\pi \leq t < \frac{3\pi}{2}$ のとき

(2)より点 P は直線 $y=-x$ 上の $-1 \leq x < 1$ の範囲を動く。点 P の x 座標は

$x = -\sqrt{2} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$ であるから、点 P は直線 $y=-x$ 上を点 $(-1, 1)$ から点 $(1, -1)$ まで動く。

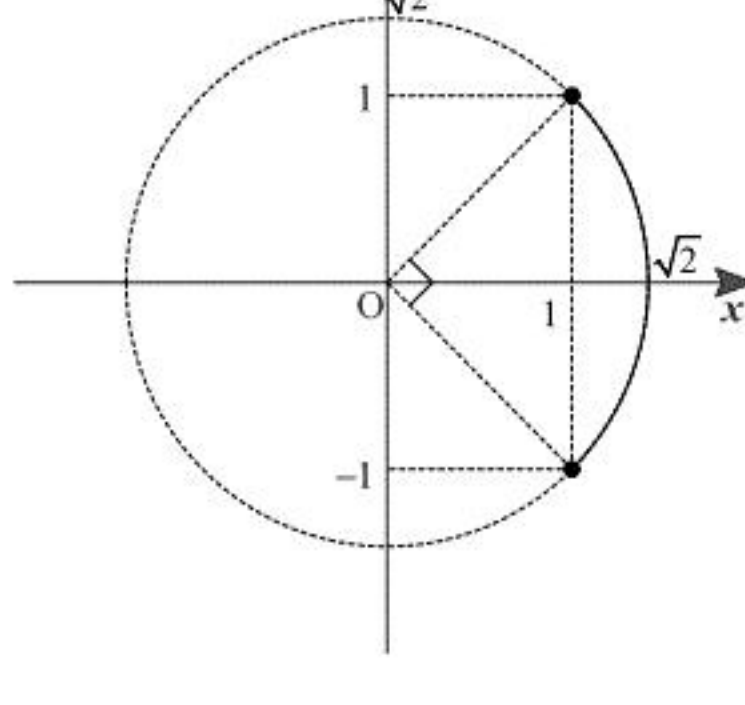
よって、この範囲での道のりは

$$\sqrt{(1+1)^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{2}$$

である。

[4] $\frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi$ のとき

(2)より点 P は原点を中心とする半径が $\sqrt{2}$ の円周上を点 $(1, -1)$ から点 $(1, 1)$ まで反時計回りに動く。つまり、下図の実線部分を動く。



よって、この範囲での道のりは[2]と同様に $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$ である。

以上、[1]~[4]より、点 P が時刻 $t=0$ から $t=2\pi$ までに実際に動いた道のりは

$$4-2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{2} + 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{2} = 4 + \sqrt{2}\pi$$

である。

(答) $4 + \sqrt{2}\pi$

(1)

与えられた関係式の両辺に $n=2$ を代入すると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^2 (2-k)a_k &= \frac{2-1}{2} \\ \Leftrightarrow (2-1)a_1 + (2-2)a_2 &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow a_1 &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

(2)

$S_n = \sum_{k=1}^n (n-k)a_k$ ($n=2, 3, 4, \dots$) とおくと,

$$\begin{aligned}S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=1}^{n+1} (n+1-k)a_k - \sum_{k=1}^n (n-k)a_k \\ &= \{(n+1-1)a_1 + \dots + (n+1-n)a_n + (n+1-n-1)a_{n+1}\} - \{(n-1)a_1 + \dots + (n-n)a_n\} \\ &= a_1 + \dots + a_n \\ &= \sum_{k=1}^n a_k\end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k &= S_{n+1} - S_n \\ &= \frac{n+1-1}{n+1} - \frac{n-1}{n} \\ &= \frac{n^2 - (n-1)(n+1)}{(n+1)n} \\ &= \frac{1}{(n+1)n}\end{aligned}$$

と表せる。(1)よりこれは $n=1$ のときも成り立つ。したがって

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{n(n+1)}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{(n+1)n}$$

(3)

$n \geq 2$ において

$$\begin{aligned}a_n &= \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\ &= \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n-1)n} \\ &= \frac{n-1-(n+1)}{(n-1)n(n+1)} \\ &= -\frac{2}{(n-1)n(n+1)}\end{aligned}$$

となる。よって $n \geq 2$ のとき、 $(n+1)n(n-1) > 0$ より $a_n = -\frac{2}{(n+1)n(n-1)} < 0$ である。

(証明終)

(4)

(3)より、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n |a_k| &= a_1 + \left(-\sum_{k=2}^n a_k\right) \\ &= \frac{1}{2} - \left(\sum_{k=1}^n a_k - a_1\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n(n+1)}\end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \frac{1}{n(n+1)} \right\} \\ &= 1\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = 1$$

(1)

関数 $y = \frac{\log x}{x}$ について、真数条件より $x > 0$ である。

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{1 - \log x}{x^2} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \log x) \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{2\log x - 3}{x^3}\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - \log x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= e \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\log x - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= e^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

となる。よって増減表は下表のようになる。

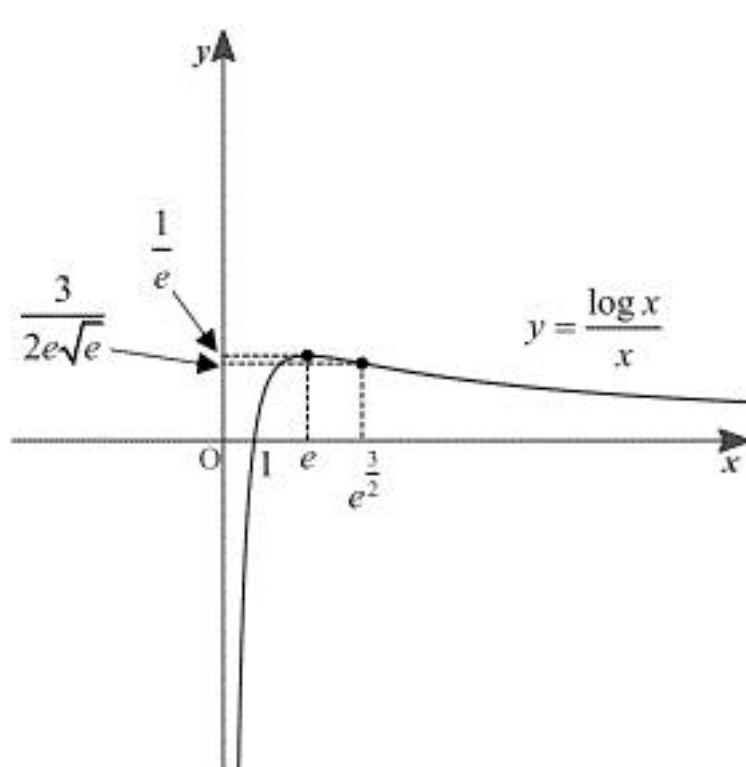
x	0	...	e	...	$e\sqrt{e}$	...
$\frac{dy}{dx}$		+	0	-	-	-
$\frac{d^2y}{dx^2}$		-	-	-	0	+
y		↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}}$	↘

また

$$\begin{aligned}\frac{\log x}{x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \log x &= 0 \quad (\because x > 0) \\ \Leftrightarrow x &= 1\end{aligned}$$

となる。問題文より $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ であり、また $\lim_{x \rightarrow +0} \log x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = \infty$ より、 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{x} = -\infty$

である。以上のことから、関数 $y = \frac{\log x}{x}$ のグラフの概形は以下のようになる。



(答) 前図

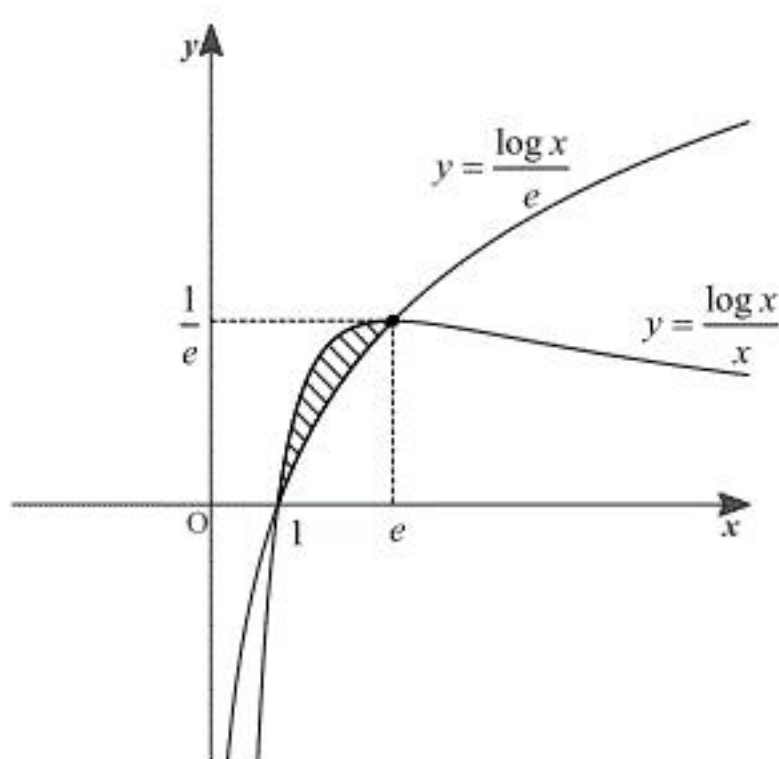
(2)

関数 $y = \frac{\log x}{x}$ のグラフと関数 $y = \frac{\log x}{e}$ の共有点の x 座標は、 x の方程式 $\frac{\log x}{x} = \frac{\log x}{e}$ の実数

解と一致するから、

$$\begin{aligned}\frac{\log x}{x} &= \frac{\log x}{e} \\ \Leftrightarrow e \log x &= x \log x \quad (\because x > 0) \\ \Leftrightarrow (x - e) \log x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1, e\end{aligned}$$

と求まる。また、 $1 < x < e$ において $\log x > 0$, $\frac{1}{e} < \frac{1}{x}$ より $\frac{\log x}{e} < \frac{\log x}{x}$ である。したがって、求める面積は下図の斜線部分の面積となる。



上図より、斜線部の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S &= \int_1^e \left(\frac{\log x}{x} - \frac{\log x}{e} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} (\log x)^2 \right]_1^e - \left\{ \left[\frac{x \log x}{e} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{ex} dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 0 - \left(\frac{e}{e} - 0 \right) + \left[\frac{x}{e} \right]_1^e \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{e}\end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{2} - \frac{1}{e}$