

【解答】

(1)	1	2	3	4	5				
	1	2	8	6	4				
(2)	6	7	8	9	10	11	12	13	
	6	4	2	6	4	3	6	2	
(3)	14	15	16	17	18	19			
	—	8	—	2	0	6			
(4)	20	21	22	23	24	25	26	27	28
	—	2	—	8	8	2	7	4	4

【解説】

(1)

$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 4$ より,

$$\begin{aligned}\alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ &= 2^3 - 3 \cdot 4 \cdot 2 \\ &= -16\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\alpha^6 + \beta^6 &= (\alpha^3 + \beta^3)^2 - 2\alpha^3\beta^3 \\ &= (-16)^2 - 2 \cdot 4^3 \\ &= 128\end{aligned}$$

となる。また,

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 2^2 - 2 \cdot 4 \\ &= -4 \\ \alpha^4 + \beta^4 &= (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 \\ &= (-4)^2 - 2 \cdot 4^2 \\ &= -16\end{aligned}$$

であるから,

$$\frac{\alpha^7 - \beta^7}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha^6 + \alpha^5\beta + \alpha^4\beta^2 + \alpha^3\beta^3 + \alpha^2\beta^4 + \alpha\beta^5 + \beta^6)(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta}$$

$$= \alpha^6 + \beta^6 + \alpha\beta(\alpha^4 + \beta^4) + \alpha^2\beta^2(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha^3\beta^3$$

$$= 128 + 4 \cdot (-16) + 4^2 \cdot (-4) + 4^3$$

$$= 64$$

である。

(2)

加法定理より,

$$\sin \frac{7}{12}\pi = \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \frac{7}{12}\pi = \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

である。また,

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{7}{12}\pi - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \cos \frac{7}{12}\pi \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{7}{12}\pi \cdot \sin \frac{\pi}{2}$$

$$= \sin \frac{7}{12}\pi$$

であるから, 半角の公式より

$$\tan^2 \frac{\pi}{24} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{12}}{1 + \cos \frac{\pi}{12}}$$

$$= \frac{1 - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{1 + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

$$= \frac{4 - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{4 + \sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{(4 - \sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{(4 + \sqrt{6} + \sqrt{2})(4 - \sqrt{6} - \sqrt{2})}$$

$$= \frac{(4 - \sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{8 - 2\sqrt{12}}$$

$$= \frac{(4 - \sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}$$

となる。ここで, $6 < \frac{25}{4}$ より $\sqrt{6} < \frac{5}{2}$ であり, $2 < \frac{9}{4}$ より $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$ と分かるから,

$$\sqrt{6} - \sqrt{2} > 0$$

$$4 - \sqrt{6} - \sqrt{2} > 4 - \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

である。したがって, $\tan \frac{\pi}{24} > 0$ より,

$$\tan \frac{\pi}{24} = \frac{4 - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$$

$$= \frac{(4 - \sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})}$$

$$= \frac{4\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{6} - 8}{4}$$

$$= \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6} - 2$$

である。

(3)

$\sqrt{n^2 + 2n + 16}$ が整数となるとき, その値を m (m は 0 以上の整数) とすると,

$$\sqrt{n^2 + 2n + 16} = m$$

と表せる。両辺を 2 乗し, 整理すると

$$n^2 + 2n + 16 = m^2$$

$$\Leftrightarrow (n+1)^2 + 15 = m^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 - (n+1)^2 = 15$$

$$\Leftrightarrow (m+n+1)(m-n-1) = 15$$

となる。 $m+n+1, m-n-1$ はどちらも整数であり, 積が正であるからこれらの符号は一致する。また, m は 0 以上の整数であるから, それらの和は

$$(m+n+1) + (m-n-1) = 2m \geq 0$$

より 0 以上の偶数である。したがって, $m+n+1, m-n-1$ は偶奇が一致する正の整数だと分かる。これらの条件を満たす整数 $(m+n+1, m-n-1)$ の組は,

$$(m+n+1, m-n-1) = (1, 15), (3, 5), (5, 3), (15, 1)$$

の 4 組である。ゆえに, それぞれ整数 (m, n) の値は,

$$(m, n) = (8, -8), (4, -2), (4, 0), (8, 6)$$

であり, $\sqrt{n^2 + 2n + 16}$ が整数となるような整数 n は, 小さい方から順に

$$n = -8, -2, 0, 6$$

となる。

(4)

曲線 $y = x^3 - 4x$ について,

$$y' = 3x^2 - 4$$

より, その曲線上の点 $(a, a^3 - 4a)$ における接線の方程式は

$$y = (3a^2 - 4)(x - a) + a^3 - 4a$$

$$= (3a^2 - 4)x - 2a^3$$

となる。したがって, この接線と曲線との共有点の x 座標は, 以下の方程式により求まる。

$$(3a^2 - 4)x - 2a^3 = x^3 - 4x$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - a)^2(x + 2a) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = a, -2a$$

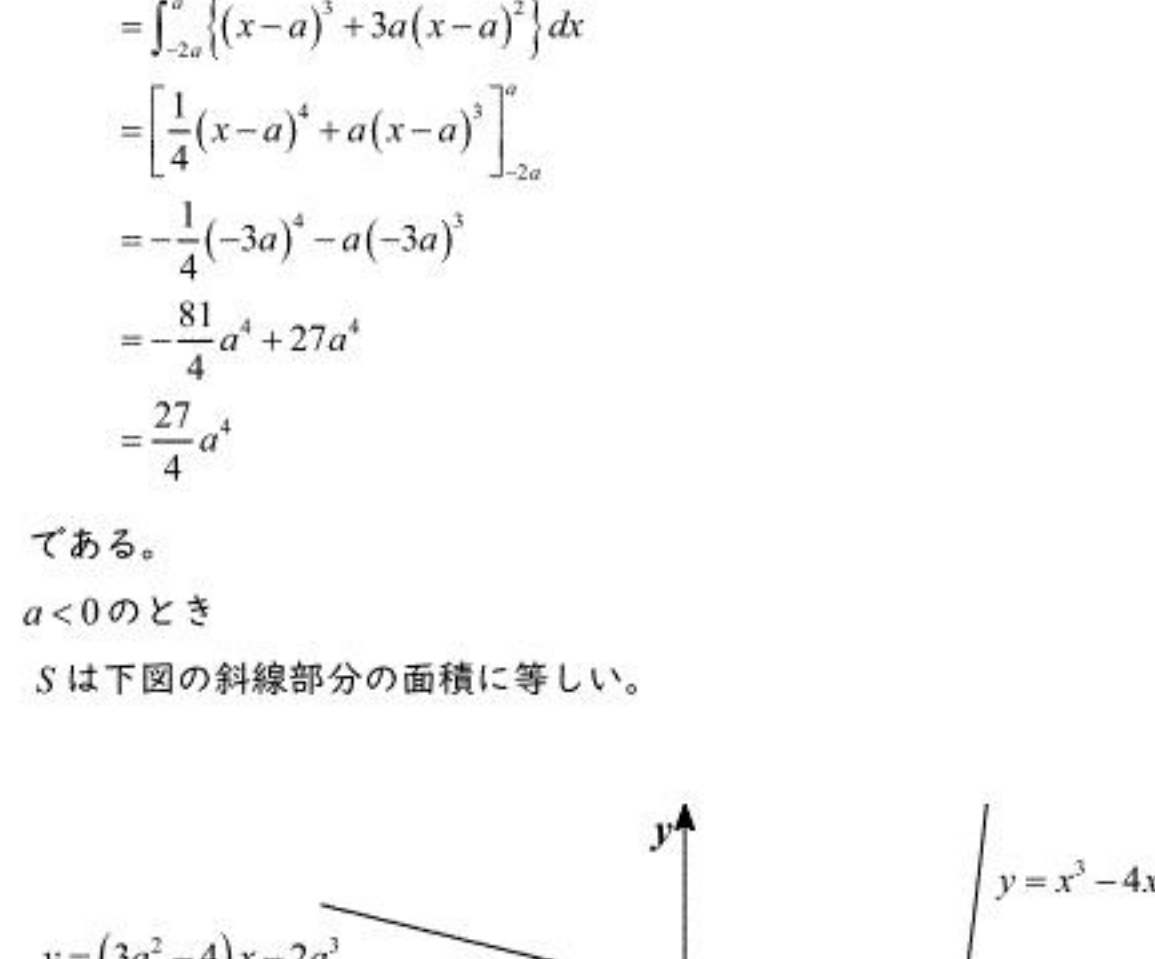
ゆえに, $a \neq 0$ より, 接点以外の共有点は

$$(-2a, -8a^3 + 8a)$$

である。以下, 曲線 $y = x^3 - 4x$ と接線 $y = (3a^2 - 4)x - 2a^3$ で囲まれた図形の面積を S とおく。

[1] $a > 0$ のとき

S は下図の斜線部分の面積に等しい。



したがって,

$$S = \int_{-2a}^a \left[(x^3 - 4x) - \{(3a^2 - 4)x - 2a^3\} \right] dx$$

$$= \int_{-2a}^a (x - a)^2(x + 2a) dx$$

$$= \int_{-2a}^a (x - a)^2(x - a + 3a) dx$$

$$= \int_{-2a}^a \{ (x - a)^3 + 3a(x - a)^2 \} dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}(x - a)^4 + a(x - a)^3 \right]_{-2a}^a$$

$$= -\frac{1}{4}(-3a)^4 - a(-3a)^3$$

$$= -\frac{81}{4}a^4 + 27a^4$$

$$= \frac{27}{4}a^4$$

である。

[2] $a < 0$ のとき

S は下図の斜線部分の面積に等しい。



したがって, [1] と同様にして,

$$S = \int_a^{-2a} \left[\{(3a^2 - 4)x - 2a^3\} - (x^3 - 4x) \right] dx$$

$$= \int_{-2a}^a \left[(x^3 - 4x) - \{(3a^2 - 4)x - 2a^3\} \right] dx$$

$$= \int_{-2a}^a (x - a)^2(x + 2a) dx$$

$$= \frac{27}{4}a^4$$

である。

以上, [1], [2] より, 求める図形の面積は

$$\frac{27}{4}a^4$$

である。

Ⅱ

【解答】

(1)	29	30	31	32	33	34	35		
	1	6	6	3	8	4	1		
(2)	36	37	38	39	40	41	42		
	8	2	5	3	1	5	3		
(3)	43	44	45	46	47	48	49	50	51
	5	5	6	1	0	5	1	5	2

【解説】

(1)1.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$ の常用対数をとると、

$$\begin{aligned}\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{50} &= 50\log_{10}\frac{1}{2} \\ &= -50\cdot 0.3010 \\ &= -15.05\end{aligned}$$

となる。したがって

$$-16 < \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{50} < -15$$

であるから、 $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$ は小数第16位に初めて0でない数字が表れる。

2.

3^{132} の常用対数をとると、

$$\begin{aligned}\log_{10}3^{132} &= 132\log_{10}3 \\ &= 132\cdot 0.4771 \\ &= 62.9772\end{aligned}$$

となる。したがって

$$62 < \log_{10}3^{132} < 63$$

であるから、 3^{132} は63桁の数である。また、

$$3^{132} = 9^{66}$$

であり、二項定理より、

$$\begin{aligned}9^{66} &= (10-1)^{66} \\ &= {}_{66}C_0\cdot 10^{66} + {}_{66}C_1\cdot 10^{65}\cdot (-1) + \cdots + {}_{66}C_{63}\cdot 10^3\cdot (-1)^{63} \\ &\quad + {}_{66}C_{64}\cdot 10^2\cdot (-1)^{64} + {}_{66}C_{65}\cdot 10\cdot (-1)^{65} + {}_{66}C_{66}\cdot (-1)^{66} \\ &= \left({}_{66}C_0\cdot 10^{63} - {}_{66}C_1\cdot 10^{62} + \cdots - {}_{66}C_{63}\right)\cdot 10^3 + 2145\cdot 100 - 66\cdot 10 + 1 \\ &= \left({}_{66}C_0\cdot 10^{63} - {}_{66}C_1\cdot 10^{62} + \cdots - {}_{66}C_{63}\right)\cdot 10^3 + 213841 \\ &= \left({}_{66}C_0\cdot 10^{63} - {}_{66}C_1\cdot 10^{62} + \cdots - {}_{66}C_{63} + 213\right)\cdot 10^3 + 841\end{aligned}$$

となる。 ${}_{66}C_0\cdot 10^{63} - {}_{66}C_1\cdot 10^{62} + \cdots - {}_{66}C_{63} + 213$ は整数であるから、 3^{132} の下3桁、すなわち1000で割った余りは、

$$841$$

である。

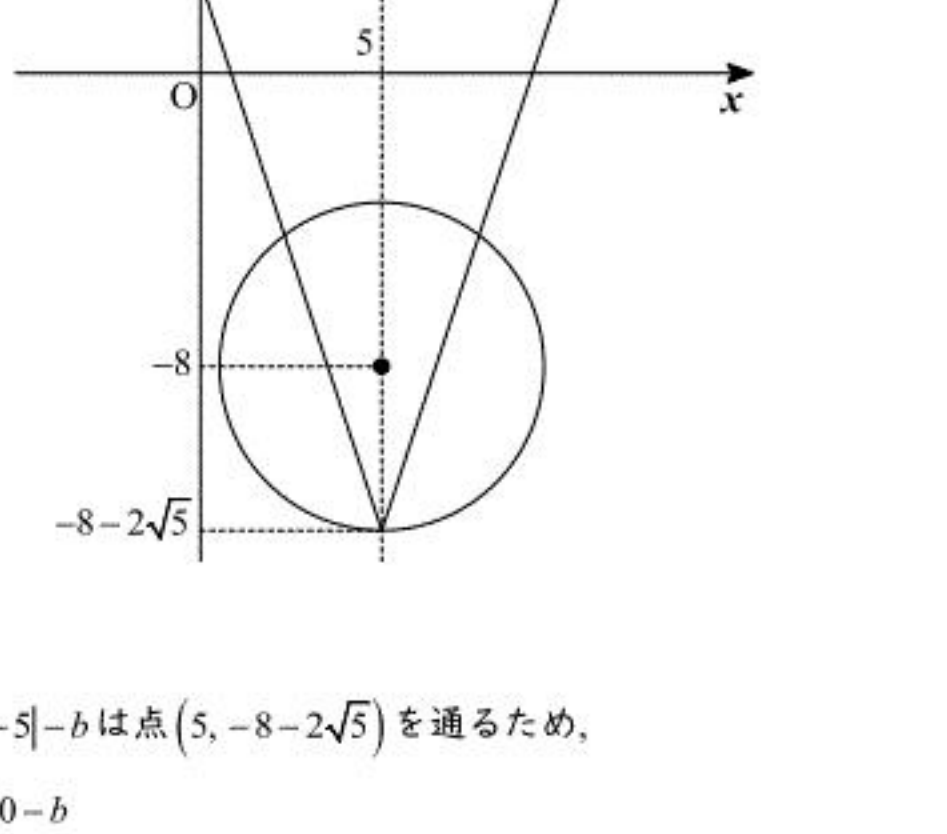
(2)1.

円 $x^2 + y^2 - 10x + 16y + 69 = 0$ について、

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 10x + 16y + 69 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y+8)^2 &= 20\end{aligned}$$

であるから、中心は $(5, -8)$ 、半径は $2\sqrt{5}$ である。関数 $y = a|x-5| - b$ 、及び円

$x^2 + y^2 - 10x + 16y + 69 = 0$ はどちらも直線 $x = 5$ に関して対称であるから、これらが3個の共有点をもつのは、両者が下図のような関係にあるときである。



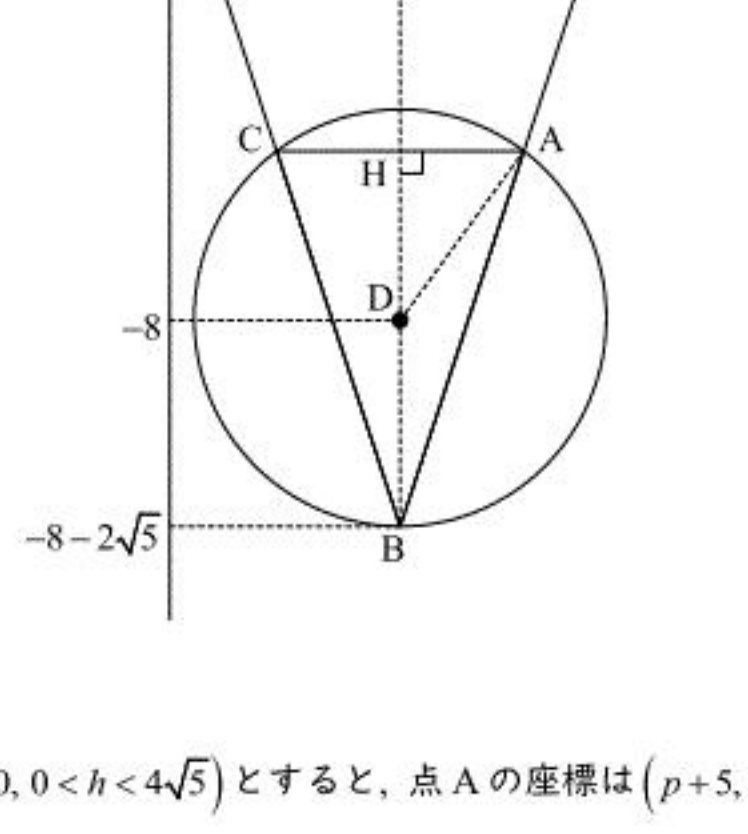
ゆえに、関数 $y = a|x-5| - b$ は点 $(5, -8-2\sqrt{5})$ を通るため、

$$\begin{aligned}-8-2\sqrt{5} &= a\cdot 0 - b \\ \therefore b &= 8+2\sqrt{5}\end{aligned}$$

と求まる。

2.

3個の共有点を x 座標の大きい方から順に A, B, C とする。対称性から $\triangle ABC$ は $BA = BC$ の二等辺三角形である。円の中心 $(5, -8)$ を点 D とし、直線 BD と辺 CA との交点を H とすると、 $\triangle ABC$ 、及び点 D, H の位置関係は、下図のようになる。



$AH = p$ 、 $BH = h$ ($p > 0$, $0 < h < 4\sqrt{5}$) とすると、点 A の座標は $(p+5, h-8-2\sqrt{5})$ と表せる。こ

れが円 $(x-5)^2 + (y+8)^2 = 20$ 上にあるため、

$$\begin{aligned}\{(p+5)-5\}^2 + \{(h-8-2\sqrt{5})+8\}^2 &= 20 \\ \Leftrightarrow p^2 + (h-2\sqrt{5})^2 &= 20 \\ \Leftrightarrow p^2 &= 4\sqrt{5}h - h^2\end{aligned}$$

である。したがって、 $\triangle ABC$ の面積を S とすると、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2p \cdot h \\ &= ph\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}S^2 &= p^2 h^2 \\ &= (4\sqrt{5}h - h^2) \cdot h^2 \\ &= 4\sqrt{5}h^3 - h^4\end{aligned}$$

となる。ここで、 $f(h) = 4\sqrt{5}h^3 - h^4$ ($0 < h < 4\sqrt{5}$) とすると、

$$\begin{aligned}f'(h) &= 12\sqrt{5}h^2 - 4h^3 \\ &= 4h^2(3\sqrt{5} - h)\end{aligned}$$

である。したがって、 $0 < h < 4\sqrt{5}$ における $f(h)$ の増減表は以下のようになる。

h	0	⋯	$3\sqrt{5}$	⋯	$4\sqrt{5}$
$f'(h)$		+	0	-	
$f(h)$		↗	675	↘	

増減表より、 $f(h)$ は $h = 3\sqrt{5}$ のとき最大値 675 をとる。 $p > 0$ であるから、 $h = 3\sqrt{5}$ のとき、

$$\begin{aligned}p^2 &= 15 \\ \therefore p &= \sqrt{15}\end{aligned}$$

であり、直線 AB の傾きを考えると、

$$\begin{aligned}a &= \frac{h}{p} \\ &= \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{15}} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。 $S > 0$ より、 $\triangle ABC$ の面積は $a = \sqrt{3}$ のとき最大値 $\sqrt{675} = 15\sqrt{3}$ をとる。

(3)1.

数列 $\{a_n\}$ を初項から第15項まで書くと、以下のようになる。

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \cdots$$

したがって、

$$\begin{aligned}a_{10} &= 55 \\ a_{15} &= 610\end{aligned}$$

である。

2.

数列 $\{a_n\}$ の一般項について考える。2次方程式 $x^2 = 1+x$ の解を $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 、 $q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ とおく

と、 $p+q=1$ 、 $pq=-1$ より与えられた漸化式は

$$a_{n+2} = -pq a_n + (p+q) a_{n+1}$$

となるから、以下の①、②のように変形できる。

$$a_{n+2} - p a_{n+1} = q(a_{n+1} - p a_n) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$a_{n+2} - q a_{n+1} = p(a_{n+1} - q a_n) \quad \cdots \textcircled{2}$$

①について、数列 $\{a_{n+1} - p a_n\}$ は初項 $a_2 - p a_1 = 1-p$ 、公比 q の等比数列であるから、 $p+q=1$ より

$$\begin{aligned}a_{n+1} - p a_n &= (1-p) \cdot q^{n-1} \\ &= q^n \quad \cdots \textcircled{3}\end{aligned}$$

である。②についても同様に、数列 $\{a_{n+1} - q a_n\}$ は初項 $a_2 - q a_1 = 1-q$ 、公比 p の等比数列であるから

$$\begin{aligned}a_{n+1} - q a_n &= (1-q) \cdot p^{n-1} \\ &= p^n \quad \cdots \textcircled{4}\end{aligned}$$

である。③、④より

$$\begin{aligned}(p-q) a_n &= p^n - q^n \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{p^n - q^n}{p-q} \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}\end{aligned}$$

である。

Ⅲ

【解答】

(1)	52	53	54	55	56	57	58
	5	6	2	4	3	2	8
(2)	59	60	61	62			
	2	3	0	5			
(3)	63	64	65	66	67		
	1	1	2	3	2		

【解説】

(1)1.

以下、右へ1区画進むことを→、上へ1区画進むことを↑と表す。AからBまで行く道順は、→5つ、↑3つの順列で表され、

$${}_8C_3=56(\text{通り}) \quad \cdots \textcircled{1}$$

存在する。

2.

AからCまで行く道順は、→3つ、↑1つの順列で表され、 ${}_4C_1$ 通り存在する。CからBまで行く道順は、→2つ、↑2つの順列で表され、 ${}_4C_2$ 通り存在する。よって、AからCを通ってBまで行く道順は、

$${}_4C_1 \cdot {}_4C_2=24(\text{通り}) \quad \cdots \textcircled{2}$$

存在する。

3.

AからCを通らずにBまで行く道順は、①から②を引けば求まり、

$$56-24=32(\text{通り})$$

存在する。

4.

AからCまで行く道順は ${}_4C_1$ 通りであり、CからDを通らずにBまで行く道順は↑↑→と→↑↑の2通りである。よって、AからCを通してDを通らずにBまで行く道順は、

$${}_4C_1 \cdot 2=8(\text{通り})$$

存在する。

(2)

標本比率を R 、標本の大きさを $n(>0)$ 人とする、信頼度95%のときの信頼区間の幅は

$$2 \times 1.96 \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} = 3.92 \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}$$

である。信頼区間の幅を4%以下とすると、

$$3.92 \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} \leq 0.04$$

となる。 R は支持率で、 $R \approx 0.6$ とみてよいから、

$$3.92 \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{n}} \leq 0.04$$

となる。よって、

$$\sqrt{n} \geq \frac{3.92 \sqrt{0.6 \cdot 0.4}}{0.04}$$

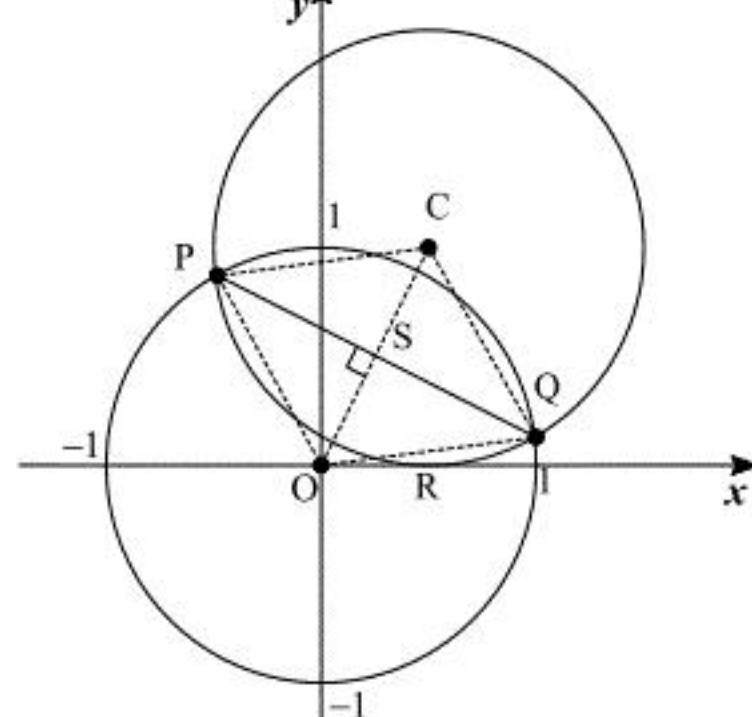
であるから、両辺を2乗して

$$n \geq 98^2 \cdot 0.24 = 2304.96$$

となる。ゆえに、2305人以上抽出すればよい。

(3)1.

円 $x^2+y^2=1$ を弦PQで折り返したとき、折り返された弧が点 $R(x_3, 0)$ で接したとすると、折り返された弧は中心 $(x_3, 1)$ 、半径1の円の一部分である。 $x_3 = \frac{1}{2}$ のとき、折り返された弧は中心 $(\frac{1}{2}, 1)$ 、半径1の円の一部分であるから、2点P、Qは、円 $x^2+y^2=1$ と $(x-\frac{1}{2})^2+(y-1)^2=1$ の交点である。ここで、下図のように中心 $(\frac{1}{2}, 1)$ を点Cとし、直線OCと弦PQの交点をSとする。



点Sは線分OCの中点であるから、

$$\begin{aligned} OS &= \frac{1}{2} OC \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

であり、 $OP=1$ であるから、 $\triangle OPS$ において三平方の定理より

$$\begin{aligned} PS &= \sqrt{OP^2 - OS^2} \\ &= \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{11}}{4} \end{aligned}$$

となる。したがって、弦PQの長さ m は

$$\begin{aligned} m &= 2PS \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{11}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{11}}{2} \end{aligned}$$

である。

2.

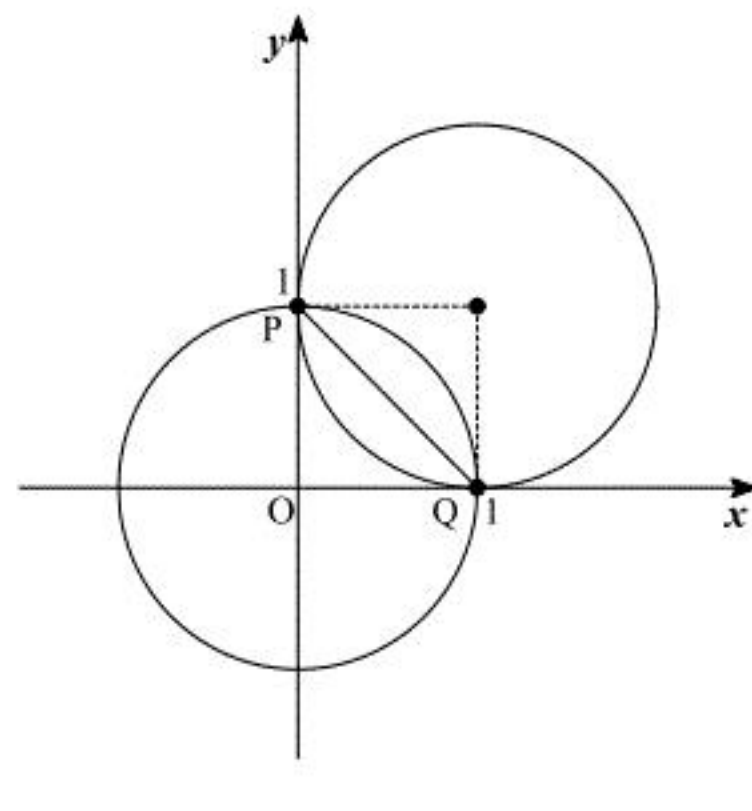
$R(x_3, 0)$ 、 $C(x_3, 1)$ として、同様に考えると、

$$\begin{aligned} OS &= \frac{1}{2} OC \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(x_3)^2 + 1^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{x_3^2 + 1} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} m &= 2PS \\ &= 2\sqrt{OP^2 - OS^2} \\ &= 2\sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{x_3^2 + 1}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{3 - x_3^2} \end{aligned}$$

である。ここで、 x_3 の範囲について考える。弦PQで折り返された弧は円 $x^2+y^2=1$ の周上及び内部に存在するから、折り返された弧と x 軸との交点の x 座標は、下図のようになったときに最大となる。



このとき、 $x_3=1$ である。また、円 $x^2+y^2=1$ は y 軸対称であるから、 x_3 の最小値は $x_3=-1$ となる。逆に、 $-1 \leq x_3 \leq 1$ を満たすように x_3 を定めると、中心 $C(x_3, 1)$ 、半径1の円と単位円の共有点として2点P、Qが定義できるため、条件を満たす弧PQが必ず存在する。ゆえに、 x_3 は $-1 \leq x_3 \leq 1$ のすべての値をとるから、 m は

$$x_3=0 \text{ のとき、最大値 } \sqrt{3}$$

をとる。

3.

$m = \sqrt{3 - x_3^2}$ 、 $-1 \leq x_3 \leq 1$ であるから、 m は

$$x_3 = \pm 1 \text{ のとき、最小値 } \sqrt{2}$$

をとる。

(1)

①, ②, ③の辺々を加えて

$$S_{n+1} + I_{n+1} + R_{n+1} = S_n + I_n + R_n$$

となる。したがって、数列 $\{S_n + I_n + R_n\}$ の項はいずれも同じ値であり、

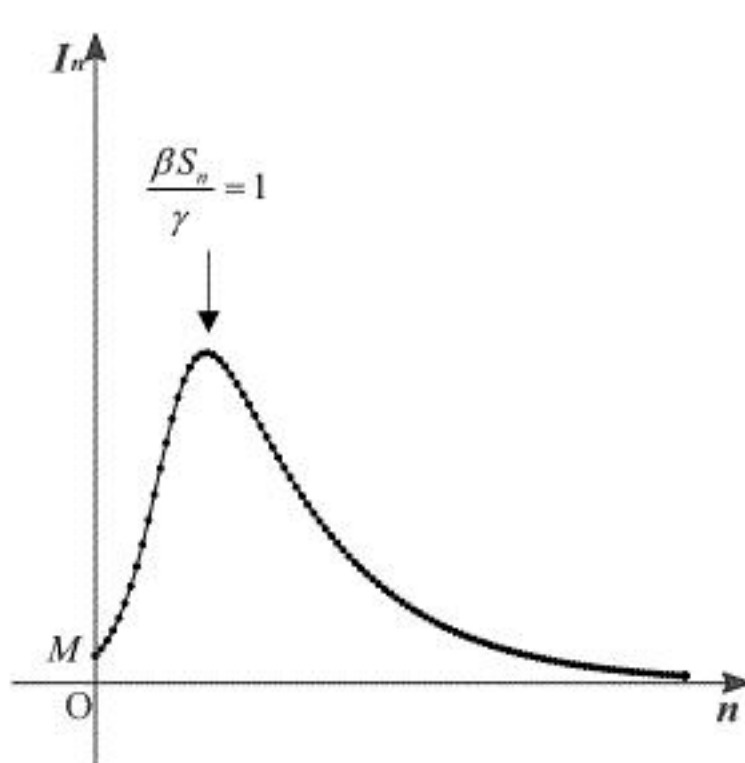
$$\begin{aligned} S_n + I_n + R_n &= S_1 + I_1 + R_1 \\ &= N + M \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $S_n + I_n + R_n = N + M$

(2)

$\frac{\beta N}{\gamma} > 1$ を仮定すると、 I_n のグラフは下図のようになる。



最初、 n が十分に小さいとき、 I_n は指数関数的に増加する。次に、 $\frac{\beta S_{n-1}}{\gamma} \geq 1 > \frac{\beta S_n}{\gamma}$ となるような n で I_n は増加から減少に転じる。最後に、 n が十分に大きいとき、 I_n は指数関数的に減少し、0 に限りなく近づく。

(答) 前図, 前述

(3)

漸化式①, ②に R_n は現れないため、 I_n の推移は I_n, S_n のみに注目して考えればよい。定義より I_n, S_n は常に 0 以上である。①より

$$S_{n+1} = (1 - \beta I_n) S_n$$

であり、与えられた条件より $0 < 1 - \beta I_n < 1$ であるから、常に $S_{n+1} < S_n$ が成り立つ。したがって、数列 $\{S_n\}$ は単調に減少する。以下、近似を用いて数列 $\{I_n\}$ の推移を考える。

[1] 感染初期の推移

ほぼ全人口が未感染者であるから、 $S_n = N$ とみなしてよい。このとき、②は

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n + \beta N I_n - \gamma I_n \\ &= (1 + \beta N - \gamma) I_n \end{aligned}$$

となる。したがって、数列 $\{I_n\}$ は初項 $I_1 = M$ 、公比 $1 + \beta N - \gamma$ の等比数列であるから

$$I_n = M(1 + \beta N - \gamma)^{n-1}$$

と表される。ここで、基本再生産数 $\frac{\beta N}{\gamma}$ について $\frac{\beta N}{\gamma} > 1$ より $1 + \beta N - \gamma > 1$ であるから、公比は 1 より大きく、感染者数 I_n は指数関数的に増加する。

[2] 感染中期の推移

②より

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \beta S_n I_n - \gamma I_n \\ &= \gamma \left(\frac{\beta S_n}{\gamma} - 1 \right) I_n \end{aligned}$$

となる。したがって、第 n 週の実効再生産数 $\frac{\beta S_n}{\gamma}$ と 1 の大小関係で I_n の推移が変化し、

$$\frac{\beta S_n}{\gamma} \geq 1 \text{ のときは } I_{n+1} \geq I_n \text{ より、数列 } \{I_n\} \text{ は単調に増加する}$$

$$\frac{\beta S_n}{\gamma} \leq 1 \text{ のときは } I_{n+1} \leq I_n \text{ より、数列 } \{I_n\} \text{ は単調に減少する}$$

ことが分かる。 S_n は単調に減少するから、 $\frac{\beta S_n}{\gamma}$ も単調に減少することに注意すると、

$\frac{\beta S_n}{\gamma} = 1$ となる週の前後で数列 $\{I_n\}$ は増加から減少に転じることが分かる。

[3] 感染後期の推移

未感染者数は非常に少なくなっているため、 $S_n = 0$ とみなしてよい。このとき、②は

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n + 0 - \gamma I_n \\ &= (1 - \gamma) I_n \end{aligned}$$

となる。したがって、数列 $\{I_n\}$ は公比 $1 - \gamma$ の等比数列となり、条件より $0 < 1 - \gamma < 1$ であるから公比の絶対値は 1 未満である。よって、感染者数 I_n は指数関数的に減少し、 n が限りなく大きくなるとき I_n は 0 に限りなく近づく。

以上、[1], [2], [3] より、 I_n のグラフは(2)のように図示される。

(答) 前述

(4)

$\frac{\beta N}{\gamma} < 1$ となるためには、感染率 β を下げ、回復率 γ を上げればよい。感染率を下げるためには、

- ・ 3密(密閉, 密集, 密接)の徹底, 外出自粛の呼びかけなどにより、感染者との濃厚接触者数を減らす
- ・ 手洗い, アルコール消毒, マスク着用などの標準予防策を徹底してもらう
- ・ ワクチン接種を広く行い、感染症に対する集団免疫の獲得につなげる

といった対策が考えられる。一方で、回復率を上げるためには、

- ・ 感染症に対する新規治療薬を開発する
- ・ 感染者が重症化する前に早期発見, 早期治療できる仕組みを確立する

といった対策が考えられる。

(答) 前述