

数 学

注 意

1. 問題は全部で8ページである.
2. 解答用紙に氏名・受験番号を忘れずに記入すること. (ただし, マーク・シートにはあらかじめ受験番号がプリントされている.)
3. 解答はすべて解答用紙に記入すること.
4. 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが, どのページも切り離してはいけない.
5. 解答用紙(その1はマーク・シート, その2は記述式)は両方とも必ず提出のこと. この問題冊子は提出する必要はない.

マーク・シート記入上の注意については, この問題冊子の裏表紙に記載されているので試験開始までに確認すること. ただし, 冊子は開かないこと.

I 以下の問題については 解答用紙 (その 1) を使用すること。

- (1) $\alpha + \beta = 2$, $\alpha\beta = 4$ とする。このとき $\alpha^6 + \beta^6 = \boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$ であり, $\frac{\alpha^7 - \beta^7}{\alpha - \beta} = \boxed{4}\boxed{5}$ である。

- (2) $\sin \frac{7}{12}\pi$, $\cos \frac{7}{12}\pi$ の値は, それぞれ

$$\sin \frac{7}{12}\pi = \frac{\sqrt{\boxed{6}} + \sqrt{2}}{\boxed{7}}$$
$$\cos \frac{7}{12}\pi = \frac{\sqrt{\boxed{8}} - \sqrt{\boxed{9}}}{\boxed{10}}$$

である。また $\tan \frac{\pi}{24}$ の値は

$$\tan \frac{\pi}{24} = \sqrt{2} - \sqrt{\boxed{11}} + \sqrt{\boxed{12}} - \boxed{13}$$

である。

- (3) $\sqrt{n^2 + 2n + 16}$ が整数となるような整数 n は, 小さい方から順に, $\boxed{14}\boxed{15}$, $\boxed{16}\boxed{17}$, $\boxed{18}$, $\boxed{19}$ である。

- (4) 曲線 $y = x^3 - 4x$ は, その曲線上の点 $(a, a^3 - 4a)$ における接線と, 接点以外に共有点を持ち, その座標は $(\boxed{20}\boxed{21}a, \boxed{22}\boxed{23}a^3 + \boxed{24}a)$ である。ただし $a \neq 0$ とする。またこの曲線と接線で囲まれた図形の面積は $\frac{\boxed{25}\boxed{26}}{\boxed{27}}a\boxed{28}$ である。

(計算余白)

Ⅱ 以下の問題については 解答用紙(その1)を使用すること.

(1) $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする.

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$ を小数で表したとき, 小数第 $\boxed{29}\boxed{30}$ 位に初めて 0 でない数字が表れる.

2. 3^{132} は $\boxed{31}\boxed{32}$ 桁の数であり, 下 3 桁は $\boxed{33}\boxed{34}\boxed{35}$ である.

(2) 関数 $y = a|x - 5| - b$ ($a > 0$) と円 $x^2 + y^2 - 10x + 16y + 69 = 0$ が 3 個の共有点をもつとする.

1. $b = \boxed{36} + \boxed{37}\sqrt{\boxed{38}}$ である.

2. $a = \sqrt{\boxed{39}}$ のときこれら 3 個の共有点を頂点とする三角形の面積が最大となり, その面積は $\boxed{40}\boxed{41}\sqrt{\boxed{42}}$ である.

(3) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定められた数列 $\{a_n\}$ がある.

1. $a_{10} = \boxed{43}\boxed{44}$, $a_{15} = \boxed{45}\boxed{46}\boxed{47}$ である.

2. 数列 $\{a_n\}$ の一般項は

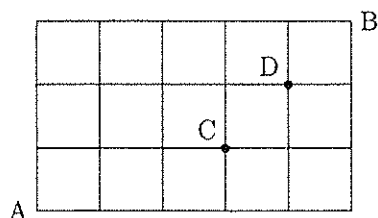
$$\frac{1}{\sqrt{\boxed{48}}} \left\{ \left(\frac{\boxed{49} + \sqrt{\boxed{50}}}{\boxed{51}} \right)^n - \left(\frac{\boxed{49} - \sqrt{\boxed{50}}}{\boxed{51}} \right)^n \right\}$$

となる.

(計算余白)

Ⅲ 以下の問題については 解答用紙(その1)を使用すること。

(1) 下の図のような道のある地域で、次のような最短の道順は何通りあるか。



1. A から B まで行く道順は 5253 通りある。
 2. A から C を通って B まで行く道順は 5455 通りある。
 3. A から C を通らずに B まで行く道順は 5657 通りある。
 4. A から C を通って D を通らずに B まで行く道順は 58 通りある。
- (2) ある政党の支持率は約 60% であると予想されている。この支持率を、信頼区間の幅が 4% 以下となるように推定したい。信頼度 95% で推定するには、59606162 人以上を抽出して調べればよい。
- (3) 円 $x^2 + y^2 = 1$ の周上の点 $P(x_1, y_1)$ および $Q(x_2, y_2)$ を考える。ただし $x_1 < x_2$, $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$ とする。直線 PQ の上方にある弧 PQ を弦 PQ で折り返したとき、折り返された弧が x 軸に点 $R(x_3, 0)$ で接したとする。弦 PQ の長さを m とする。

1. $x_3 = \frac{1}{2}$ のとき、 $m = \frac{\sqrt{\text{6364}}}{\text{65}}$ である。
2. m の最大値は、 $\sqrt{\text{66}}$ である。
3. m の最小値は、 $\sqrt{\text{67}}$ である。

(計算余白)

Ⅳ 以下の問題については 解答用紙 (その 2) を使用すること。

ある都市における感染症の流行の推移を、3つの数列の漸化式で表した。漸化式は $n = 1, 2, 3, \dots$ で成り立つものとする。

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n - \beta S_n I_n & \dots\dots\dots ① \\ I_{n+1} = I_n + \beta S_n I_n - \gamma I_n & \dots\dots\dots ② \\ R_{n+1} = R_n + \gamma I_n & \dots\dots\dots ③ \end{cases}$$

ここで S_n, I_n, R_n は、それぞれ第 n 週における未感染者数、感染者数、回復者数を表す。 β および γ は、それぞれ感染率、回復率を示し、 $0 < \beta < 1, 0 < \gamma < 1$ とする。また $S_1 = N > 0, I_1 = M > 0, R_1 = 0, \beta I_n < 1$ とする。 $\frac{\beta N}{\gamma}$ を基本再生産数、 $\frac{\beta S_n}{\gamma}$ を第 n 週の実効再生産数と呼ぶ。このとき次の問いに答えよ。

- (1) $S_n + I_n + R_n$ を求めよ。
- (2) $\frac{\beta N}{\gamma} > 1$ を仮定して、 I_n のグラフ (n が横軸、 I_n が縦軸) をかけ、さらにその特徴を記述せよ。
- (3) (2) の理由を「基本再生産数」と「実効再生産数」の用語を使って説明せよ。ただし公比の絶対値が 1 未満の等比数列 $\{a_n\}$ は、 n が限りなく大きくなるとき a_n が 0 に限りなく近づくという性質は使ってもよい。
- (4) $\frac{\beta N}{\gamma} < 1$ となるためにはどうすればよいか。「感染率」、「回復率」の用語を使って、例を挙げて具体的に説明せよ。

(計算余白)

マーク・シート記入上の注意

- (1) 問題の文中の $\boxed{1}$, $\boxed{2\ 3}$ などには, 特に指示がないかぎり, 符号(−), 数字(0~9), 文字(a, b, c, d), または記号(*)が入る. 1, 2, 3, … の一つ一つは, これらのいずれか一つに対応する. それらを解答用紙の1, 2, 3, … で示された解答欄にマークして答えよ.

例 $\boxed{11\ 12\ 13}$ に −83 と答えたいとき

11	☒	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9	☐ a	☐ b	☐ c	☐ d	☐ *
12	☐ −	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☒	☐ 9	☐ a	☐ b	☐ c	☐ d	☐ *
13	☐ −	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☒	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9	☐ a	☐ b	☐ c	☐ d	☐ *

- (2) 解答欄が余るときは, 余った欄(後の方を余らせる)に*をマークする.

例 $\boxed{14\ 15}$ に 4 と答えたいとき

14	☐ −	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☒	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9	☐ a	☐ b	☐ c	☐ d	☐ *
15	☐ −	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9	☐ a	☐ b	☐ c	☐ d	☒

- (3) 解答欄が不足するときは, 最後の欄に*をマークする.

例 $\boxed{16\ 17}$ に 345 と答えたいとき

16	☐ −	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☒	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9	☐ a	☐ b	☐ c	☐ d	☐ *
17	☐ −	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9	☐ a	☐ b	☐ c	☐ d	☒

- (4) 解答欄に適合するものがないときは, その欄に*をマークする.

例 $\boxed{18\ 19}$ に対して問題が

$$x^2 + 1 < 0 \text{ ならば } x \geq \boxed{18\ 19}$$

のとき

18	☐ −	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9	☐ a	☐ b	☐ c	☐ d	☒
19	☐ −	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9	☐ a	☐ b	☐ c	☐ d	☒

- (5) 分数形で解答するときは, 既約分数として符号は分子につける.

- (6) 根号あるいは対数を含む形で解答するときは, 根号の中や真数に現れる自然数が最小になる形で答える. [例] $\sqrt{8}$ は $2\sqrt{2}$, $3\log_2 9$ は $6\log_2 3$ とする.

- (7) 分数形で根号を含む形で解答するときは, $\frac{6+4\sqrt{2}}{4}$ ではなく, $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ のように約分する.