

〔解答〕

①	②	③
5	2	0
④	⑤	⑥
8	1	2

〔解説〕

(i)より

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+y+z} &= \frac{1}{5} \\ \Leftrightarrow 5x &= x+y+z \quad (\because x+y+z > 0) \\ \Leftrightarrow 4x - (y+z) &= 0 \quad \dots\dots ①\end{aligned}$$

を得る。また, (ii)より

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+y+z} \cdot \frac{x-1}{(x-1)+y+z} &= \frac{1}{30} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{5} \cdot \frac{x-1}{(x-1)+y+z} &= \frac{1}{30} \\ \Leftrightarrow 6(x-1) &= (x-1)+y+z \quad (\because (x-1)+y+z > 0) \\ \Leftrightarrow 5x - (y+z) &= 5 \quad \dots\dots ②\end{aligned}$$

となる。①, ②を連立させて解くと

$$x=5, y+z=20 \quad \dots\dots ③$$

となり, $x \geq 3$ を満たす。さらに, (iii)から

$$\frac{x}{x+y+z} \cdot \frac{y}{(x-1)+y+z} \cdot \frac{z}{(x-1)+(y-1)+z} = \frac{4}{115}$$

を得る。③を代入すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{5} \cdot \frac{y}{24} \cdot \frac{z}{23} &= \frac{4}{115} \\ \therefore yz &= 96\end{aligned}$$

となる。これに $z=20-y$ を代入すると

$$\begin{aligned}y(20-y) &= 96 \\ \Leftrightarrow -y^2 + 20y - 96 &= 0 \\ \Leftrightarrow y^2 - 20y + 96 &= 0 \\ \Leftrightarrow (y-12)(y-8) &= 0 \\ \therefore y &= 8, 12\end{aligned}$$

となり,

$$(y, z) = (8, 12), (12, 8)$$

であるが, $y < z$ より $(y, z) = (8, 12)$ であることがわかる。これは $y, z \geq 3$ を満たす。

Ⅱ

〔解答〕

(1)	7	8	9	10						
	1	2	3	2						
(2)	11	12								
	7	4								
(3)	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
	8	5	2	1	4	2	1	1	0	

〔解説〕

(1)

$\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OB}$ であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

である。

(2)

直線 AB 上に点 N があるから、 k を実数として、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AN} &= k\overrightarrow{AB} \\ &= -k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

とおける。このとき、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} \\ &= \overrightarrow{AN} - (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}) \\ &= (-k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}) - \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OB}\right) \\ &= \left(-k + \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{OA} + \left(k - \frac{3}{2}\right)\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\triangle OAB$ は1辺の長さが1の正三角形より

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。直線 AC と MN は直交するから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ \left(-k + \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{OA} + \left(k - \frac{3}{2}\right)\overrightarrow{OB} \right\} \cdot (-\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\left(-k + \frac{1}{2}\right)|\overrightarrow{OA}|^2 + \left\{ 3\left(-k + \frac{1}{2}\right) - \left(k - \frac{3}{2}\right) \right\} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 3\left(k - \frac{3}{2}\right)|\overrightarrow{OB}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(k - \frac{1}{2}\right) + (-4k + 3) \cdot \frac{1}{2} + \left(3k - \frac{9}{2}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2k - \frac{7}{2} &= 0 \\ \therefore k &= \frac{7}{4}\end{aligned}$$

を得る。

(3)

(2)の結果より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= -\frac{5}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} \\ |\overrightarrow{MN}|^2 &= \left| -\frac{5}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} \right|^2 \\ &= \frac{25}{16}|\overrightarrow{OA}|^2 - 2 \cdot \frac{5}{16}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{16}|\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= \frac{25 - 5 + 1}{16} \\ &= \frac{21}{16} \\ \therefore |\overrightarrow{MN}| &= \frac{\sqrt{21}}{4} \quad (\because |\overrightarrow{MN}| > 0)\end{aligned}$$

となる。また、点 P は直線 MN 上にあるから実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP} &= t\overrightarrow{MN} \\ &= -\frac{5}{4}t\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}t\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

とおける。このとき、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{4}t\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}t\right)\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

となる。ここで、点 P は直線 OB 上にあり、 $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ は一次独立であるため、 $\overrightarrow{OA}$ の係数は 0 となり、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} - \frac{5}{4}t &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 - 5t &= 0 \\ \therefore t &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

を得る。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}\right)\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{8}{5}\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{MP} &= \frac{2}{5}\overrightarrow{MN}\end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned}OP &= \frac{8}{5}|\overrightarrow{OB}| \\ &= \frac{8}{5} \\ MP &= \frac{2}{5}|\overrightarrow{MN}| \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{21}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{21}}{10}\end{aligned}$$

である。

Ⅲ

〔解答〕

(1)	22	23	24	25			
	－	6	－	1			
(2)	26	27	28	29	30	31	32
	－	7	2	－	2	5	4
(3)	33	34	35	36			
	1	0	9	6			

〔解説〕

(1)

$$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$$

より、 $x<-3$ 、 $-1<x$ のとき $x^2+4x+3>0$ であり、 $-3\leq x\leq -1$ のとき $x^2+4x+3\leq 0$ である。

[1] $x<-3$ 、 $-1<x$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+4x+3)+3x+3 \\ &= x^2+7x+6 \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2+7x+6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)(x+6) &= 0 \\ \therefore x &= -6 \quad (\because x<-3, -1<x) \end{aligned}$$

である。

[2] $-3\leq x\leq -1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2+4x+3)+3x+3 \\ &= -x^2-x \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow -x^2-x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x+1) &= 0 \\ \therefore x &= -1 \quad (\because -3\leq x\leq -1) \end{aligned}$$

である。

以上、[1]、[2]より方程式 $f(x)=0$ の解は $x=-6$ 、 -1 である。

(2)

[1] $x<-3$ 、 $-1<x$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2+7x+6 \\ &= \left(x+\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 6 \\ &= \left(x+\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \end{aligned}$$

となる。よって、 $x=-\frac{7}{2}$ のとき最小値 $-\frac{25}{4}$ をとる。

[2] $-3\leq x\leq -1$ のとき

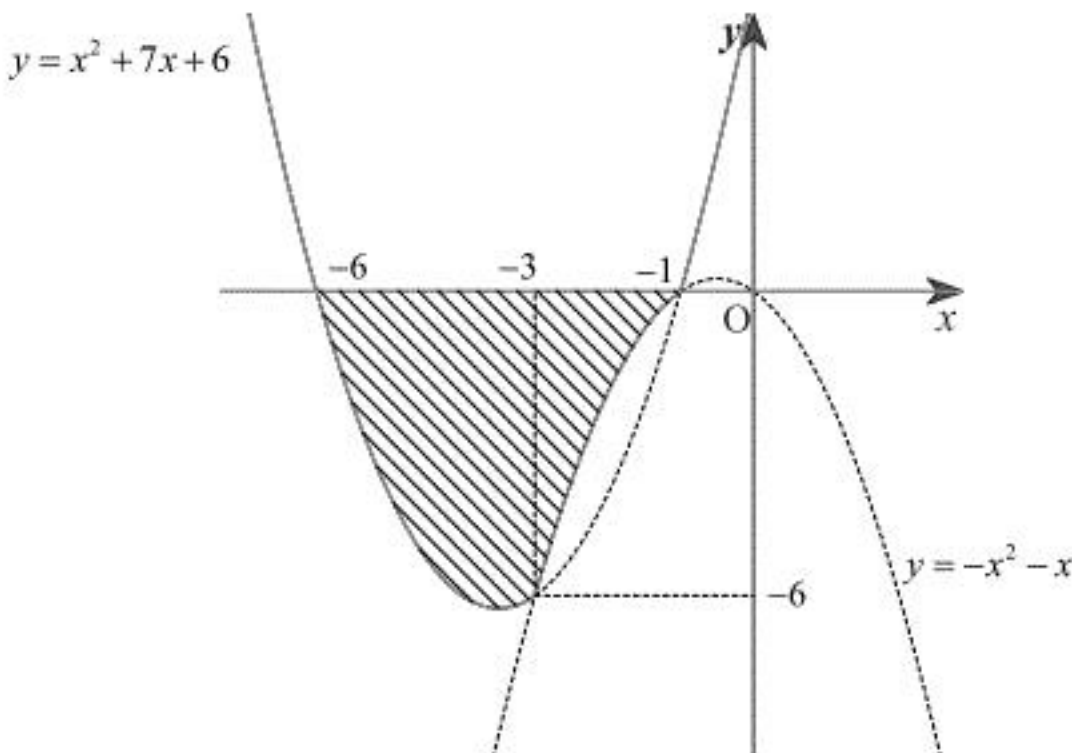
$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2-x \\ &= -(x^2+x) \\ &= -\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right\} \\ &= -\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。よって、 $x=-3$ のとき最小値 -6 をとる。

以上、[1]、[2]より関数 $f(x)$ は $x=-\frac{7}{2}$ で最小値 $-\frac{25}{4}$ をとる。

(3)

求める面積は下図の斜線部分である。



よって、求める面積は

$$\begin{aligned} &\int_{-6}^{-1} -(x^2+7x+6)dx - \int_{-3}^{-1} \{(-x^2-x) - (x^2+7x+6)\}dx \\ &= -\int_{-6}^{-1} (x+6)(x+1)dx + 2\int_{-3}^{-1} (x+3)(x+1)dx \\ &= \frac{1}{6}\{(-1)-(-6)\}^3 - 2\cdot\frac{1}{6}\{(-1)-(-3)\}^3 \\ &= \frac{5^3-2\cdot 2^3}{6} \\ &= \frac{109}{6} \end{aligned}$$

である。

IV

【解答】

(1)	37	38	39	40	41
	－	1	2	2	9
(2)	42	43	44	45	46
	－	7	5	2	4

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}(2 \cdot 2^x - 1)(4^x - 24) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2 \cdot 2^x - 1)(2^{2x} - 24) &= 0 \\ \therefore 2^x &= \frac{1}{2}, 2^{2x} = 24\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}2^x &= \frac{1}{2} \\ \therefore x &= -1 \\ 2^{2x} &= 24 \\ \Leftrightarrow \log_{10} 2^{2x} &= \log_{10} (2^3 \cdot 3) \\ \Leftrightarrow 2x \log_{10} 2 &= 3 \log_{10} 2 + \log_{10} 3 \\ \therefore x &= \frac{3}{2} + \frac{\log_{10} 3}{2 \log_{10} 2} = 1.5 + \frac{0.4771}{2 \cdot 0.3010} = 2.292 \dots\end{aligned}$$

となる。よって、方程式の整数解は $x = -1$ であり、整数でない解を小数第3位で四捨五入して小数第2位まで求めると、2.29である。

(2)

$2^x = X$ とおくと、

$$\begin{aligned}(2 \cdot 2^x - 1)(4^x - 24) &= a \\ \Leftrightarrow (2X - 1)(X^2 - 24) &= a \\ \Leftrightarrow 2X^3 - X^2 - 48X + 24 &= a\end{aligned}$$

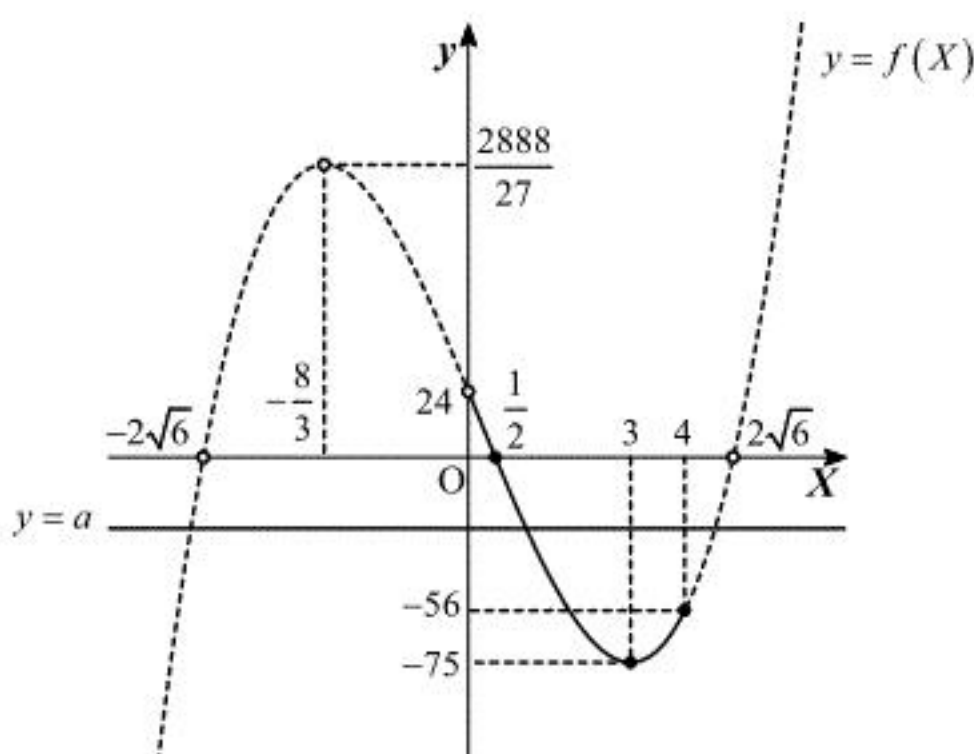
となる。 $x \leq 2$ のとき $0 < X \leq 4$ であるから、 $f(X) = 2X^3 - X^2 - 48X + 24$ とおくと、求める条件は関数 $y = f(X)$ のグラフと直線 $y = a$ が $0 < X \leq 4$ の範囲に共有点をもつことである。

$$\begin{aligned}f'(X) &= 6X^2 - 2X - 48 \\ &= 2(3X^2 - X - 24) \\ &= 2(3X + 8)(X - 3)\end{aligned}$$

より、 $0 < X \leq 4$ の範囲で $f'(X) = 0$ とすると $X = 3$ を得る。よって、 $0 < X \leq 4$ における $f(X)$ の増減表は次のようになる。

X	(0)	...	3	...	4
$f'(X)$		－	0	＋	
$f(X)$	(24)	↘	－75	↗	－56

上表より、関数 $y = f(X)$ のグラフの概形は下図の通りである。



したがって、求める a の値の範囲は、関数 $y = f(X)$ のグラフと直線 $y = a$ が $0 < X \leq 4$ の範囲に共有点をもつ範囲であるから、

$$-75 \leq a < 24$$

となる。