

【解答】

(1)	1	2	3	4	5	
	3	5	2	1	6	
(2)	6	7				
	3	7				
(3)	8	9	10	11	12	13
	5	6	7	9	7	5

【解説】

(1)

1個のさいころを4回投げるとき、全事象は $6^4=1296$ (通り)でこれらは同様に確からしい。また、出る目がちょうど2種類であるとき、2種類の出る目の選び方が ${}_6C_2=15$ (通り)であり、ちょうど2種類であるのは $2^4-2=14$ (通り)であるため、求める確率は、

$$\frac{15 \cdot 14}{1296} = \frac{35}{216}$$

である。

(2)

1個のさいころを4回投げるとき、全事象は $6^4=1296$ (通り)でこれらは同様に確からしい。1

個のさいころを4回投げるとき、出る目がちょうど2種類である確率は、(1)より $\frac{35}{216}$ であ

る。また、1個のさいころを4回投げるとき、出る目がちょうど2種類であり、2種類の目が2回ずつ出るとき、2種類の出る目の選び方が ${}_6C_2=15$ (通り)であり、その2種類の目が2回ずつ出るのは、 ${}_4C_2=6$ (通り)であるため、この事象の確率は、

$$\frac{15 \cdot 6}{1296} = \frac{5}{72}$$

となる。よって、1個のさいころを4回投げ、出る目がちょうど2種類であったとき、それら2種類の目が2回ずつ出た条件付き確率は、

$$\frac{\frac{5}{72}}{\frac{35}{216}} = \frac{3}{7}$$

である。

(3)

1個のさいころを2回投げ、同じ目が続けて出ないとき、2回目に出る目は1回目に出た目以外の5通りあるため、この事象の確率は $\frac{5}{6}$ である。よって、1個のさいころを80回投げ、同じ

目が続けて出ることが一度もない確率は $\left(\frac{5}{6}\right)^{79}$ である。ここで、 n を自然数とし、確率 $\left(\frac{5}{6}\right)^{79}$

を10進法の小数で表したとき、小数第 n 位に初めて0でない数字が現れるとすると、

$$10^{-n} \leq \left(\frac{5}{6}\right)^{79} < 10^{-n+1}$$

が成り立つ。両辺の常用対数をとると、

$$\begin{aligned} \log_{10} 10^{-n} &\leq \log_{10} \left(\frac{5}{6}\right)^{79} < \log_{10} 10^{-n+1} \\ \Leftrightarrow -n &\leq -79 \log_{10} \frac{6}{5} < -n+1 \\ \Leftrightarrow 79 \log_{10} \frac{6}{5} &\leq n < 1 + 79 \log_{10} \frac{6}{5} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} 79 \log_{10} \frac{6}{5} &= 79 \cdot (2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3 - 1) \\ &= 79 \cdot (2 \cdot 0.3010 + 0.4771 - 1) \\ &= 79 \cdot 0.0791 \\ &= 6.2489 \end{aligned}$$

であるため、

$$\begin{aligned} 10^{-n} &\leq \left(\frac{5}{6}\right)^{79} < 10^{-n+1} \\ \Leftrightarrow 79 \log_{10} \frac{6}{5} &\leq n < 1 + 79 \log_{10} \frac{6}{5} \\ \Leftrightarrow 6.2489 &\leq n < 1 + 6.2489 \\ \therefore n &= 7 \end{aligned}$$

となる。また、 k を1以上9以下の整数とし、確率 $\left(\frac{5}{6}\right)^{79}$ を10進法の小数で表したときの小数第7位の0でない数字を k とすると、

$$k \cdot 10^{-7} \leq \left(\frac{5}{6}\right)^{79} < (k+1) \cdot 10^{-7}$$

が成り立つ。両辺の常用対数をとると、

$$\begin{aligned} \log_{10} (k \cdot 10^{-7}) &\leq \log_{10} \left(\frac{5}{6}\right)^{79} < \log_{10} \{(k+1) \cdot 10^{-7}\} \\ -7 + \log_{10} k &\leq -79 \log_{10} \frac{6}{5} < -7 + \log_{10} (k+1) \\ \Leftrightarrow -7 + \log_{10} k &\leq -6.2489 < -7 + \log_{10} (k+1) \\ \therefore \log_{10} k &\leq 0.7511 < \log_{10} (k+1) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \log_{10} 5 &= 1 - \log_{10} 2 \\ &= 1 - 0.3010 \\ &= 0.6990 \\ \log_{10} 6 &= \log_{10} 2 + \log_{10} 3 \\ &= 0.3010 + 0.4771 \\ &= 0.7781 \end{aligned}$$

であるため、 $\log_{10} 5 \leq 0.7511 < \log_{10} 6$ が成り立つ。よって、 $k=5$ である。以上より、確率

$\left(\frac{5}{6}\right)^{79}$ を10進法の小数で表すと、小数第7位に初めて0でない数字が現れ、その0でない最初の数字は5である。

II

【解答】

(1)	14	15	16	17	18	19	20	21	22
	3	5	—	7	2	5	1	1	5
(2)	23	24	25						
	1	1	6						

【解説】

(1)

$\angle BAC = \theta$ ($0 < \theta < \pi$) とすると、 $\angle ACB = 2\theta$ より、

$$0 < \theta + 2\theta < \pi$$

$$\therefore 0 < \theta < \frac{\pi}{3}$$

である。よって、 $\triangle ABC$ において、正弦定理より、

$$\frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{AB}{\sin \angle ACB}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{\sin \theta} = \frac{6}{\sin 2\theta}$$

$$\Leftrightarrow 10 \sin \theta \cos \theta = 6 \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta = \frac{3}{5} \quad (\because \sin \theta \neq 0)$$

$$\therefore \cos \angle BAC = \frac{3}{5}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \cos \angle ACB &= \cos 2\theta \\ &= 2 \cos^2 \theta - 1 \\ &= 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 \\ &= -\frac{7}{25} \end{aligned}$$

となる。さらに、

$$\begin{aligned} \angle ABC &= \pi - (\theta + 2\theta) \\ &= \pi - 3\theta \end{aligned}$$

であるため、 $\triangle ABC$ において、正弦定理より、

$$\frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{\sin \theta} = \frac{AC}{\sin(\pi - 3\theta)}$$

$$\Leftrightarrow AC = \frac{5 \sin 3\theta}{\sin \theta}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \sin 3\theta &= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \\ &= \sin \theta (-4 \sin^2 \theta + 3) \\ &= \sin \theta (4 \cos^2 \theta - 1) \end{aligned}$$

であるため、

$$\begin{aligned} AC &= \frac{5 \sin 3\theta}{\sin \theta} \\ &= 5(4 \cos^2 \theta - 1) \\ &= 5 \cdot \left\{ 4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 \right\} \\ &= \frac{11}{5} \end{aligned}$$

となる。

(2)

$\angle ACB = 2\theta$ であり、 CD は $\angle ACB$ の二等分線であるため、

$$\angle ACD = \angle BCD = \theta$$

となる。また、 $\angle BAC = \theta$ より、 $\triangle ACD$ は $AD = CD$ の二等辺三角形である。よって、 $\triangle ACD$ において、余弦定理より、

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2 \cdot AC \cdot AD \cdot \cos \angle DAC$$

$$\Leftrightarrow CD^2 = \left(\frac{11}{5}\right)^2 + CD^2 - 2 \cdot \frac{11}{5} \cdot CD \cdot \frac{3}{5}$$

$$\therefore CD = \frac{11}{6}$$

となる。

III

【解答】

(1)	$\boxed{26}$	$\boxed{27}$	$\boxed{28}$	$\boxed{29}$		
	4	-	3	2		
(2)	$\boxed{30}$	$\boxed{31}$	$\boxed{32}$	$\boxed{33}$	$\boxed{34}$	$\boxed{35}$
	-	3	7	7	1	1

【解説】

(1)

等差数列 $\{a_n\}$ の公差を d とすると、第3項は $a_1 + 2d$ 、初項から第8項までの和は、

$$8a_1 + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot (7+1) \cdot d = 4(2a_1 + 7d)$$

と表される。よって、条件より、

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 1 \\ 4(2a_1 + 7d) = -10 \end{cases}$$

$$\therefore a_1 = 4, d = -\frac{3}{2}$$

となるため、 $\{a_n\}$ の初項は4、公差は $-\frac{3}{2}$ である。

(2)

(1)より、 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = -\frac{3}{2}n + \frac{11}{2}$ である。また、第 k 群には 2^k 個の数が入るため、第1群から第 k 群までの項の個数の和は、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k 2^i &= \frac{2(2^k - 1)}{2 - 1} \\ &= 2^{k+1} - 2 \end{aligned}$$

である。よって、第1群から第7群までの個数の和は $2^{7+1} - 2 = 254$ であるため、第8群の最初の数は $\{a_n\}$ の第255項である。したがって、第8群の最初の数は、

$$\begin{aligned} a_{255} &= -\frac{3}{2} \cdot 255 + \frac{11}{2} \\ &= -377 \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} a_n &\leq -5000 \\ \Leftrightarrow -\frac{3}{2}n + \frac{11}{2} &\leq -5000 \\ \therefore n &\geq 3337 \end{aligned}$$

であるため、 -5000 以下の数が初めて現れるのは第3337項である。ここで、第3337項が第 k 群に入るとすると、

$$\begin{aligned} 2^k - 2 &< 3337 \leq 2^{k+1} - 2 \\ \Leftrightarrow \frac{3339}{2} &\leq 2^k < 3339 \end{aligned}$$

が成り立つ。 $2^{11} = 2048$ より、 $\frac{3339}{2} \leq 2048 < 3339$ が成り立つため、第3337項は第11群にある。よって、 -5000 以下の数が初めて現れるのは第11群である。

IV

【解答】

(1)	36	37	38	39	40	41
	9	2	1	0	－	3
(2)	42	43				
	1	6				

【解説】

(1)

$f(x) = \int_0^x (3 - \sqrt{t})e^{-\sqrt{t}} dt$ であるため,

$$f'(x) = (3 - \sqrt{x})e^{-\sqrt{x}}$$

となる。よって、 $x > 0$ における $f(x)$ の増減は下表のようになる。

x	(0)	...	9	...
$f'(x)$		+	0	－
$f(x)$	(0)	↗	$f(9)$	↘

また,

$$\frac{d}{dt}e^{-\sqrt{t}} = -\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{-\sqrt{t}}$$

より、 $x > 0$ に対し,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x (3 - \sqrt{t})e^{-\sqrt{t}} dt \\ &= 2 \int_0^x (t - 3\sqrt{t}) \cdot \left(\frac{d}{dt}e^{-\sqrt{t}} \right) dt \\ &= 2 \left[(t - 3\sqrt{t})e^{-\sqrt{t}} \right]_0^x - 2 \int_0^x \frac{d}{dt}(t - 3\sqrt{t}) \cdot e^{-\sqrt{t}} dt \\ &= 2(x - 3\sqrt{x})e^{-\sqrt{x}} + 2 \int_0^x (2\sqrt{t} - 3) \cdot \left(\frac{d}{dt}e^{-\sqrt{t}} \right) dt \\ &= 2(x - 3\sqrt{x})e^{-\sqrt{x}} + 2 \left[(2\sqrt{t} - 3)e^{-\sqrt{t}} \right]_0^x - 2 \int_0^x \frac{d}{dt}(2\sqrt{t} - 3) \cdot e^{-\sqrt{t}} dt \\ &= 2(x - 3\sqrt{x})e^{-\sqrt{x}} + 2(2\sqrt{x} - 3)e^{-\sqrt{x}} + 6 - 2 \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\sqrt{t}} dt \\ &= 2(x - \sqrt{x} - 3)e^{-\sqrt{x}} + 6 + 4 \left[e^{-\sqrt{t}} \right]_0^x \\ &= 2 + 2(x - \sqrt{x} - 1)e^{-\sqrt{x}} \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} f(9) &= 2 + 2 \cdot (9 - \sqrt{9} - 1) \cdot e^{-\sqrt{9}} \\ &= 2 + 10e^{-3} \end{aligned}$$

となるため、 $x > 0$ において関数 $f(x)$ は $x = 9$ のとき極大値 $2 + 10e^{-3}$ をとる。

(2)

$$f'(x) = (3 - \sqrt{x})e^{-\sqrt{x}} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-\sqrt{x}} + (3 - \sqrt{x}) \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} \right) \\ &= -\frac{4 - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} \\ &= \frac{x - 16}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 4)} e^{-\sqrt{x}} \end{aligned}$$

となる。よって、 $x > 0$ における $f(x)$ の増減・凹凸は下表のようになる。

x	(0)	...	9	...	16	...
$f'(x)$		+	0	－		－
$f''(x)$		－		－	0	+
$f(x)$		↗	$f(9)$	↘	$f(16)$	↗

したがって、曲線 $y = f(x)$ ($x > 0$) 上の点 $(16, f(16))$ は変曲点である。

【解答】

(1)	44	45	46	47	48
	3	2	4	2	2
(2)	49	50	51		
	－	1	2		
(3)	52	53	54		
	3	3	5		

【解説】

(1)

点 P の x 座標は 0 であるため、

$$\cos 2t = 0$$

$$\therefore t = \frac{\pi}{4} \left(\because 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

である。よって、 $\sin \left(3 \cdot \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ より、点 P の座標は $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ となる。また、

$$\frac{dx}{dt} = -2 \sin 2t, \frac{dy}{dt} = 3 \cos 3t$$

であるため、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= -\frac{3 \cos 3t}{2 \sin 2t} \end{aligned}$$

となる。したがって、曲線 C 上の点 P における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= -\frac{3 \cos \left(3 \cdot \frac{\pi}{4} \right)}{2 \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{4} \right)} (x - 0) + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{4} x + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

である。

(2)

曲線 C と x 軸の交点の y 座標は 0 であるため、

$$\sin 3t = 0$$

$$\therefore t = 0, \frac{\pi}{3} \left(\because 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

となる。よって、 $\cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2}$ より、曲線 C と x 軸の交点は $(1, 0)$ および $\left(-\frac{1}{2}, 0 \right)$ である。

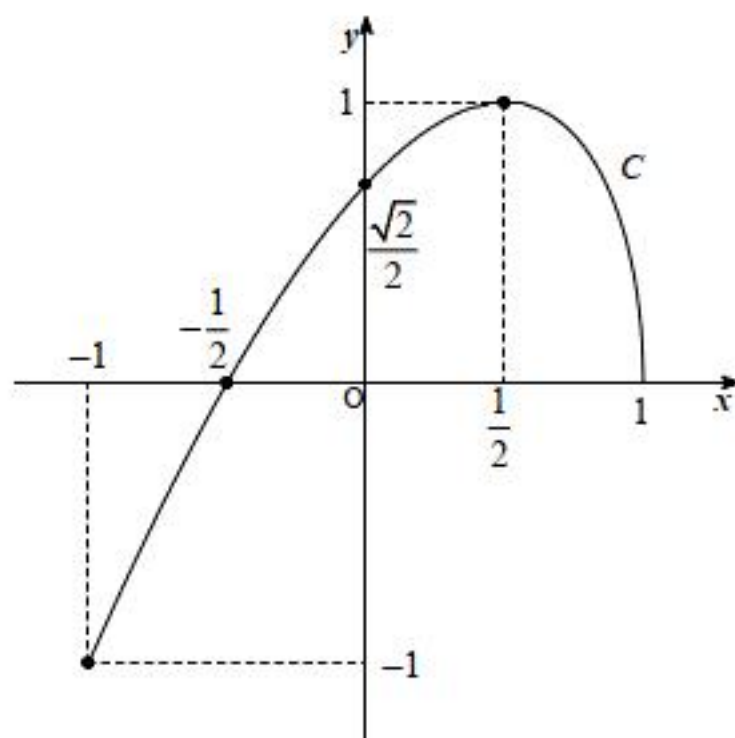
(3)

$$\frac{dx}{dt} = -2 \sin 2t, \frac{dy}{dt} = 3 \cos 3t$$

より、 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ における $x = \cos 2t$, $y = \sin 3t$ の増減は下表のようになる。

t	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$	0	－	－	－	0
$\frac{dy}{dt}$		＋	0	－	0
(x, y)	$(1, 0)$	↖	$\left(\frac{1}{2}, 1 \right)$	↙	$(-1, -1)$

よって、曲線 C の概形は下図のようになる。



上図より、曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積は、

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^1 y dx &= \int_{\frac{\pi}{3}}^0 y \cdot \frac{dx}{dt} dt \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3t \cdot (-2 \sin 2t) dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3t \cdot \sin 2t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \{ \cos(3t - 2t) - \cos(3t + 2t) \} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos t - \cos 5t) dt \\ &= \left[\sin t - \frac{1}{5} \sin 5t \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$

である。