

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{9}$	$-\frac{7}{6}$	$\frac{59}{18}$

【解説】

(1)

 $y = x^2 + x + 1$ を x で微分すると

$$y' = 2x + 1$$

となる。よって、放物線 C 上の点 $P(-2, 3)$ における接線の傾きは $-2 \cdot 2 + 1 = -3$ であり、直線 ℓ_1 の傾きを m_1 とすると

$$m_1 \cdot (-3) = -1$$

$$\Leftrightarrow m_1 = \frac{1}{3}$$

が成立する。したがって、直線 ℓ_1 の方程式は

$$y - 3 = \frac{1}{3}(x + 2)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$$

である。

(2)

点 Q の x 座標を x_1 とおくと、この点における C の接線の傾きは $2x_1 + 1$ である。 $x_1 = -\frac{1}{2}$ のと

き ℓ_2 は x 軸に垂直な直線となるが、 ℓ_1 は x 軸に平行ではないから $x_1 \neq -\frac{1}{2}$ である。よって、

ℓ_2 の傾きを m_2 とすると

$$(2x_1 + 1) \cdot m_2 = -1$$

$$\Leftrightarrow m_2 = -\frac{1}{2x_1 + 1} \left(\because x_1 \neq -\frac{1}{2} \right)$$

であり、 ℓ_1, ℓ_2 が直交するとき

$$-\frac{1}{2x_1 + 1} \cdot \frac{1}{3} = -1$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{3}$$

となる。点 Q は C 上に存在するから、その y 座標は

$$y = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{7}{9}$$

であり、 $Q\left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{9}\right)$ が分かる。

(3)

直線 ℓ_2 の方程式は

$$y - \frac{7}{9} = -3\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = -3x - \frac{2}{9}$$

である。これと直線 ℓ_1 の方程式 $y = \frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$ と連立し、 y を消去すると

$$-3x - \frac{2}{9} = \frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$$

$$\Leftrightarrow -27x - 2 = 3x + 33$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{7}{6}$$

が得られ、これを直線 ℓ_1 の方程式に代入して

$$y = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{7}{6}\right) + \frac{11}{3}$$

$$= \frac{59}{18}$$

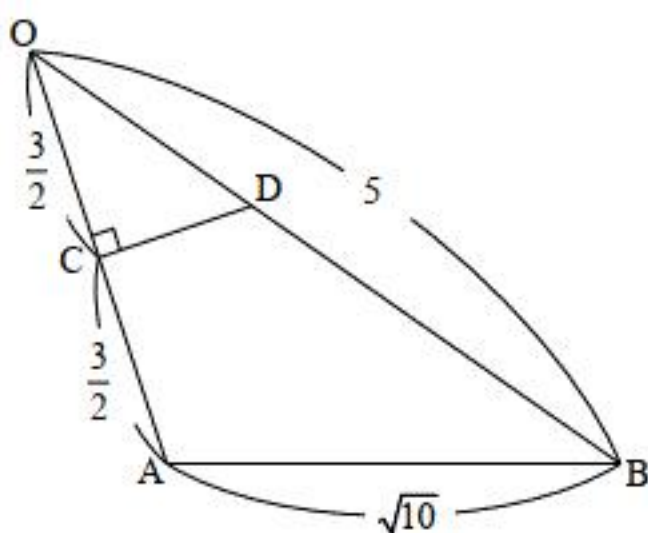
となるから、 ℓ_1, ℓ_2 の交点の座標は $\left(-\frac{7}{6}, \frac{59}{18}\right)$ である。

【解答】

キ	ク	ケ
12	$\frac{3}{8}$	$\frac{27}{32}$

【解説】

(1)

 $\triangle OAB$ で余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos \angle AOB &= \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} \\ &= \frac{9 + 25 - 10}{2 \cdot 3 \cdot 5} \\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos \angle AOB \\ &= 3 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} \\ &= 12\end{aligned}$$

となる。

(2)

 $\overrightarrow{CD}$ と $\overrightarrow{OA}$ は直交し、 $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OB}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CD} &= 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) &= 0 \\ \Leftrightarrow k\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 12k &= \frac{9}{2} \\ \Leftrightarrow k &= \frac{3}{8}\end{aligned}$$

となる。

(3)

 $0 < \angle AOB < \pi$ より $\sin \angle AOB = \sqrt{1 - \cos^2 \angle AOB} = \frac{3}{5}$ であるから、 $\triangle OAB$ の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} \\ &= \frac{9}{2}\end{aligned}$$

となる。よって、 $OC:CA=1:1$ 、 $OD:DB=3:5$ であるから $\triangle OCD$ の面積は

$$\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{1+1} \cdot \frac{3}{5+3} = \frac{27}{32}$$

である。

【解答】

コ	サ	シ	ス
1	$\frac{1}{3} - \frac{2}{3}b_n$	$\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$	$\frac{3}{10} + \frac{1}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

【解説】

(1)

P は頂点 A, B, C, D のいずれかに必ずいるから

$$\begin{aligned} a_n + b_n + c_n + d_n &= 1 \\ \Leftrightarrow a_n + 2b_n + c_n &= 1 \quad (\because b_n = d_n) \end{aligned}$$

が成立する。

(2)

$n+1$ 秒後に頂点 B にいるのは、 n 秒後に頂点 A にいて頂点 B に移動する場合と、 n 秒後に頂点 C にいて頂点 B に移動する場合があるから

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n \\ \Leftrightarrow a_n + c_n &= 3b_{n+1} \end{aligned}$$

となる。これを $a_n + c_n + 2b_n = 1$ に代入して

$$\begin{aligned} 3b_{n+1} + 2b_n &= 1 \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3}b_n \end{aligned}$$

が得られる。

(3)

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3}b_n \\ \Leftrightarrow b_{n+1} - \frac{1}{5} &= -\frac{2}{3}\left(b_n - \frac{1}{5}\right) \end{aligned}$$

と変形できるから、数列 $\left\{b_n - \frac{1}{5}\right\}$ は初項 $b_1 - \frac{1}{5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ 、公比 $-\frac{2}{3}$ の等比数列である。よって

$$\begin{aligned} b_n - \frac{1}{5} &= \frac{2}{15}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow b_n &= \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n \end{aligned}$$

である。

(4)

$n+1$ 秒後に頂点 A にいるのは、 n 秒後に頂点 B にいて頂点 A に移動する場合と、 n 秒後に頂点 C にいて頂点 A に移動する場合と、 n 秒後に頂点 D にいて頂点 A に移動する場合があるから

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{3}c_n + \frac{1}{2}d_n = b_n + \frac{1}{3}c_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成立する。また、 $n+1$ 秒後に頂点 C にいるのは、 n 秒後に頂点 B にいて頂点 C に移動する場合と、 n 秒後に頂点 D にいて頂点 C に移動する場合と、 n 秒後に頂点 A にいて頂点 C に移動する場合があるから

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{3}a_n = b_n + \frac{1}{3}a_n \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成立する。①-②より

$$a_{n+1} - c_{n+1} = -\frac{1}{3}(a_n - c_n)$$

であるから、数列 $\{a_n - c_n\}$ は初項 $a_1 - c_1 = 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$ 、公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$\begin{aligned} a_n - c_n &= -\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow a_n &= \left(-\frac{1}{3}\right)^n + c_n \end{aligned}$$

となる。これと $b_n = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ を $a_n + 2b_n + c_n = 1$ に代入して

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{3}\right)^n + c_n + \frac{2}{5} - \frac{2}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n + c_n &= 1 \\ \Leftrightarrow c_n &= \frac{3}{10} + \frac{1}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

が得られる。

(1)

$$y = x^2 + tx + t^2$$

$$= \left(x + \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}t^2$$

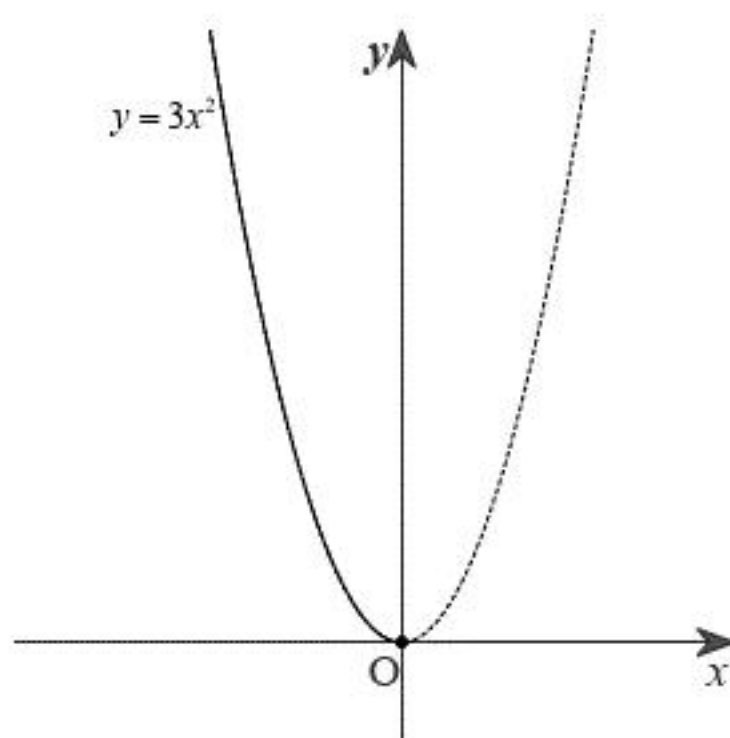
と平方完成できるから、頂点の座標は $\left(-\frac{t}{2}, \frac{3}{4}t^2\right)$ である。 t が動くときの頂点の座標を

(X, Y) とおくと、 $X = -\frac{t}{2}, Y = \frac{3}{4}t^2$ であるから、 $X = -\frac{t}{2} \Leftrightarrow t = -2X$ を $Y = \frac{3}{4}t^2$ に代入して

$$Y = \frac{3}{4}(-2X)^2$$

$$= 3X^2$$

が得られる。また、 $t \geq 0$ より $-2X \geq 0 \Leftrightarrow X \leq 0$ である。したがって、放物線 C の頂点の軌跡は $y = 3x^2$ の $x \leq 0$ の部分であり、図示すると下図の実線部のようになる(原点を含む)。



(答) 前図

(2)

$$y = x^2 + tx + t^2$$

$$\Leftrightarrow t^2 + xt + x^2 - y = 0$$

と変形し、 t についての2次方程式として見る。 $f(t) = t^2 + xt + x^2 - y$ とおくと、求めるのは $f(t) = 0$ が0以上の実数解を少なくとも1つ持つ x, y の条件である。

$f(t) = \left(t + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 - y$ より $z = f(t)$ の軸は $t = -\frac{x}{2}$ である。以下、解の個数により場合分けを行う。ここで、 $f(t) = 0$ の判別式を D とおく。

[1] $f(t) = 0$ が0以上の解を1つだけ持つとき

条件は $f(0) < 0$ または「 $f(0) = 0$ かつ $t = -\frac{x}{2} < 0$ 」または「 $D = 0$ かつ $t = -\frac{x}{2} \geq 0$ 」である。

る。 $f(0) < 0$ について、

$$f(0) < 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y < 0$$

$$\Leftrightarrow y > x^2$$

であり、「 $f(0) = 0$ かつ $t = -\frac{x}{2} < 0$ 」について、

$$f(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = x^2$$

$$-\frac{x}{2} < 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0$$

より、 $y = x^2 (x > 0)$ であり、「 $D = 0$ かつ $t = -\frac{x}{2} \geq 0$ 」について、

$$D = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4(x^2 - y) = 0 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x^2$$

$$-\frac{x}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq 0$$

より、 $y = \frac{3}{4}x^2 (x \leq 0)$ である。以上より、 $y > x^2$ 、 $y = x^2 (x > 0)$ 、 $y = \frac{3}{4}x^2 (x \leq 0)$ が x, y の条件である。

[2] $f(t) = 0$ が0以上の解を2つ持つとき

条件は $D > 0$ かつ $f(0) \geq 0$ かつ $t = -\frac{x}{2} \geq 0$ である。

$$D > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4(x^2 - y) > 0$$

$$\Leftrightarrow y > \frac{3}{4}x^2$$

$$f(0) \geq 0$$

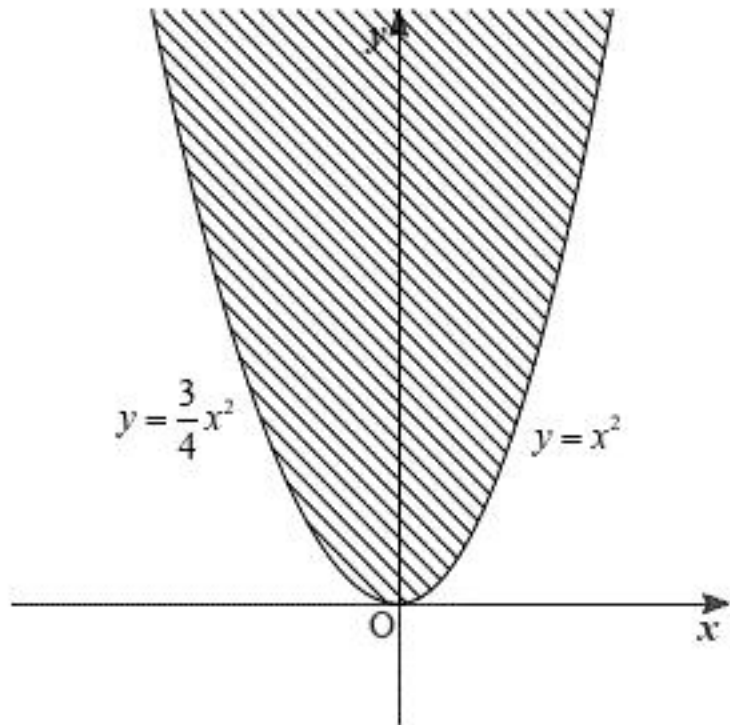
$$\Leftrightarrow y \leq x^2$$

$$-\frac{x}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq 0$$

より、 $\frac{3}{4}x^2 < y \leq x^2 (x \leq 0)$ が x, y の条件である。

以上、[1], [2]より、放物線 C の通過する領域は $x < 0$ のとき $y \geq \frac{3}{4}x^2$ 、 $x \geq 0$ のとき $y \geq x^2$ であり、図示すると下図斜線部のようになる。ただし境界を含む。



(答) 前図

(1)

三角関数の合成を行うと

$$x = \cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

となり、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ より $\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9}{4}\pi$ であるから $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ であり、 x の値の範囲は $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ となる。

(答) $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

(2)

 $x = \cos \theta + \sin \theta$ の両辺を二乗して

$$\begin{aligned} x^2 &= (\cos \theta + \sin \theta)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 1 + 2 \cos \theta \sin \theta \\ \Leftrightarrow \cos \theta \sin \theta &= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \cos^3 \theta + \sin^3 \theta - 4 \cos \theta \sin \theta \\ &= (\cos \theta + \sin \theta)(\cos^2 \theta - \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta) - 4 \cos \theta \sin \theta \\ &= x \left(1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \right) - 2x^2 + 2 \\ &= -\frac{1}{2} x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2} x + 2 \end{aligned}$$

である。

(答) $f(\theta) = -\frac{1}{2} x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2} x + 2$

(3)

 $g(x) = -\frac{1}{2} x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2} x + 2$ とおくと

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{3}{2} x^2 - 4x + \frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{2} (3x^2 + 8x - 3) \\ &= -\frac{1}{2} (3x - 1)(x + 3) \end{aligned}$$

であり、 $g'(x) = 0$ とすると、 $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ より $x = \frac{1}{3}$ である。よって、 $g(x)$ の増減は下表の通りである。

x	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} - 2$	$\nearrow$	$\frac{61}{27}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2} - 2$

したがって、 $f(\theta) (= g(x))$ の最大値は $\frac{61}{27}$ 、最小値は $-\frac{\sqrt{2}}{2} - 2$ である。

(答) 最大値 $\frac{61}{27}$ 、最小値 $-\frac{\sqrt{2}}{2} - 2$