

〔解答〕

ア	イ	ウ
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}p_n$

エ	オ
$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^n$	$\frac{2}{3}$

〔解説〕

(1)

座標1に滞在するのは最初に1回コインを投げて裏が出るときであるから

$$p_1 = \frac{1}{2}$$

である。また、座標2に滞在するのは最初に1回コインを投げて表が出るときと最初に2回コインを投げてどちらも裏が出るときであり、これらの事象は互いに排反であるから

$$p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

となる。

(2)

Pが $n+1$ の点に滞在しない場合は必ず n の点に滞在しており、 $n+1$ の点に滞在しないためには n の点に滞在しているときに表を出せばよいから

$$1 - p_{n+1} = \frac{1}{2} p_n$$

が成立する。

(3)

$$\begin{aligned} 1 - p_{n+1} &= \frac{1}{2} p_n \\ \Leftrightarrow p_{n+1} - \frac{2}{3} &= -\frac{1}{2} \left(p_n - \frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

と変形できるから、数列 $\left\{ p_n - \frac{2}{3} \right\}$ は初項 $p_1 - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$ 、公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列である。よって

$$\begin{aligned} p_n - \frac{2}{3} &= -\frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow p_n &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^n \end{aligned}$$

となる。

(4)

(3)の結果より、 $-1 < \left(-\frac{1}{2} \right) < 1$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。

〔解答〕

カ	キ	ク
$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$

ケ	コ
$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{105}$

〔解説〕

(1)

与式を変形すると

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{AP} + 4\overrightarrow{BP} + 8\overrightarrow{OC} &= \vec{0} \\
 \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} + 2(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) + 4(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) + 8(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}) &= \vec{0} \\
 \Leftrightarrow 15\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 8\overrightarrow{OC} \\
 \Leftrightarrow \vec{p} = \frac{2}{15}\vec{a} + \frac{4}{15}\vec{b} + \frac{8}{15}\vec{c}
 \end{aligned}$$

となる。3点O, P, Qは同一直線上に存在するから、実数 k を用いて

$$\begin{aligned}
 \vec{q} &= k\vec{p} \\
 &= \frac{2}{15}k\vec{a} + \frac{4}{15}k\vec{b} + \frac{8}{15}k\vec{c}
 \end{aligned}$$

と表せる。また、点Qは平面ABC上に存在するから

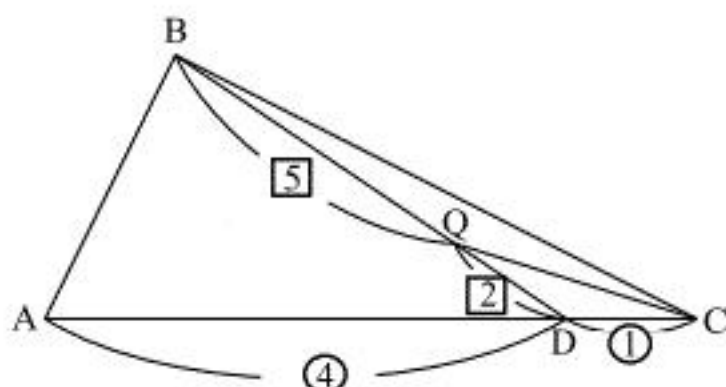
$$\begin{aligned}
 \frac{2}{15}k + \frac{4}{15}k + \frac{8}{15}k &= 1 \\
 \Leftrightarrow k &= \frac{15}{14}
 \end{aligned}$$

となる。よって

$$\vec{q} = \frac{1}{7}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b} + \frac{4}{7}\vec{c}$$

である。

(2)

 $\overrightarrow{BQ}$ は

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{BQ} &= \vec{q} - \vec{b} \\
 &= \frac{1}{7}(\vec{a} - \vec{b}) + \frac{2}{7}(\vec{b} - \vec{b}) + \frac{4}{7}(\vec{c} - \vec{b}) \\
 &= \frac{1}{7}\overrightarrow{BA} + \frac{4}{7}\overrightarrow{BC} \\
 &= \frac{5}{7} \cdot \frac{\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{BC}}{5}
 \end{aligned}$$

と表すことができるから、辺ACを4:1に内分する点をDとおくと、点Qは線分BDを5:2に内分する点である。よって、 $\triangle QBC$ の面積は $\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$S \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{1}{7}S$$

となり、 $\triangle ABC$ の $\frac{1}{7}$ 倍であることがわかる。

(3)

(1)で得た結果から $OP:PQ=14:1$ である。 $\triangle ABC$ を底面とみると、四面体PABCと四面体OABCの高さの比は $OP:PQ=14:1$ に等しい。よって、四面体OABCの体積を V とすると四面体PABCの体積は $\frac{1}{15}V$ である。また、四面体PABCの底面を $\triangle ABC$ 、四面体PQBCの底面を $\triangle QBC$ とみると高さは等しいから、体積比は $\triangle ABC$ と $\triangle QBC$ の比に等しい。よって、四面体PQBCの体積は

$$\frac{1}{15}V \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{105}V$$

であり、四面体OABCの $\frac{1}{105}$ 倍であることがわかる。

(1)

点P, Qは等速円運動をしており, $t=0$ で $P(1, 0, 0)$, $Q(0, 3, 0)$ かつ速度ベクトルが $(0, 0, 3)$ であるから, 正の実数 θ_1, θ_2 を用いて $P(\cos \theta_1 t, 0, \sin \theta_1 t)$, $Q(0, 3 \cos \theta_2 t, 3 \sin \theta_2 t)$ と表すことができる。このとき, 点P, Qの移動する速さはそれぞれ

$$\sqrt{\left(\frac{d}{dt} \cos \theta_1 t\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} 0\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} \sin \theta_1 t\right)^2} = \theta_1 \quad (\because \theta_1 > 0)$$

$$\sqrt{\left(\frac{d}{dt} 0\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} 3 \cos \theta_2 t\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} 3 \sin \theta_2 t\right)^2} = 3\theta_2 \quad (\because \theta_2 > 0)$$

となり, それぞれ3に等しいから $\theta_1 = 3, \theta_2 = 1$ が得られる。よって,
 $P(\cos 3t, 0, \sin 3t)$, $Q(0, 3 \cos t, 3 \sin t)$ である。

(答) $P(\cos 3t, 0, \sin 3t)$, $Q(0, 3 \cos t, 3 \sin t)$

(2)

PQの長さは0以上の実数であるから, PQが最大, 最小となるとき PQ^2 もそれぞれ最大, 最小となる。よって, PQ^2 を計算すると

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (\cos 3t - 0)^2 + (0 - 3 \cos t)^2 + (\sin 3t - 3 \sin t)^2 \\ &= (\sin^2 3t + \cos^2 3t) + (9 \cos^2 t + 9 \sin^2 t) - 6 \sin 3t \sin t \\ &= 10 - 6 \sin 3t \sin t \\ &= 10 - 6 \sin t (3 \sin t - 4 \sin^3 t) \\ &= 10 + 24 \sin^4 t - 18 \sin^2 t \\ &= 24 \left(\sin^2 t - \frac{3}{8} \right)^2 + \frac{53}{8} \end{aligned}$$

となる。 $-1 \leq \sin t \leq 1$ より $0 \leq \sin^2 t \leq 1$ であるから, PQ^2 は $\sin^2 t = \frac{3}{8}$ のとき最小値 $\frac{53}{8}$ をと

り, $\sin^2 t = 1$ のとき最大値16をとる。すなわち, PQの最大値は4, 最小値は $\frac{\sqrt{106}}{4}$ である。

(答) 最大値4, 最小値 $\frac{\sqrt{106}}{4}$

(1)

$$f'(x) = 2x + a + \frac{2cx}{1+x^2}$$

であり、極値をとるとき $f'(x) = 0$ が成立するから

$$f'(1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 + a + c = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 + a + \frac{4}{5}c = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が得られる。①-②より

$$-2 + \frac{1}{5}c = 0 \Leftrightarrow c = 10$$

となる。これを①に代入して

$$2 + a + 10 = 0 \Leftrightarrow a = -12$$

となる。また、 $f(1) = 10 \log 2$ より

$$f(1) = 10 \log 2$$

$$\Leftrightarrow 1 - 12 + b + 10 \log 2 = 10 \log 2$$

$$\Leftrightarrow b = 11$$

である。

(答) $a = -12, b = 11, c = 10$

(2)

(1)の結果より

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 12 + \frac{20x}{1+x^2} \\ &= \frac{(2x-12)(1+x^2) + 20x}{1+x^2} \\ &= \frac{2x^3 - 12x^2 + 22x - 12}{1+x^2} \\ &= \frac{2(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)}{1+x^2} \\ &= \frac{2(x-1)(x-2)(x-3)}{1+x^2} \end{aligned}$$

であり、 $f'(x) = 0$ とすると $x = 1, 2, 3$ が得られる。よって、 $f(x)$ の増減表は下の通りになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$10 \log 2$	$\nearrow$	$10 \log 5 - 9$	$\searrow$	$10 \log 10 - 16$	$\nearrow$

(答) 前表

(1)

区分解積分法を用いて、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n (n+k)^3 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^3 \\ &= \int_0^1 (1+x)^3 dx \\ &= \left[\frac{1}{4} (1+x)^4 \right]_0^1 \\ &= \frac{15}{4}\end{aligned}$$

と計算できる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n (n+k)^3 = \frac{15}{4}$$

(2)

区分解積分法を用いて、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k e^{\frac{k}{2n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} e^{\frac{k}{2n}} \\ &= \int_0^1 x e^{\frac{x}{2}} dx \\ &= \left[2x e^{\frac{x}{2}} \right]_0^1 - \int_0^1 2 e^{\frac{x}{2}} dx \\ &= 2e^{\frac{1}{2}} - \left[4e^{\frac{x}{2}} \right]_0^1 \\ &= 4 - 2e^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

と計算できる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k e^{\frac{k}{2n}} = 4 - 2e^{\frac{1}{2}}$$