

【解答】

(1)	1	2		
	3	4		
(2)	3	4		
	5	9		
(3)	5	6	7	
	5	1	2	
(4)	8	9	10	11
	3	1	5	4

【解説】

(1)

さいころを1回投げるときの目の出方は6通り存在し、これらは同様に確からしい。 $X_1 = 2$ のとき、 $Y = \frac{X_2 X_3}{X_1}$ が整数となるには、 X_2, X_3 の少なくとも1つが偶数である必要がある。余事象を考えると、 X_2, X_3 が両方とも奇数である確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

となる。したがって、求める確率は

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

となる。

(2)

$X_1 = 3$ のとき、 $Y = \frac{X_2 X_3}{X_1}$ が整数となるには、 X_2, X_3 の少なくとも1つが3の倍数である必要がある。余事象を考えると、 X_2, X_3 が両方とも3の倍数でない確率は

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

となる。したがって、求める確率は

$$1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

となる。

(3)

$X_1 = 4$ のとき、 $Y = \frac{X_2 X_3}{X_1}$ が整数となるには、 X_2, X_3 の少なくとも1つが4であること、または X_2, X_3 の両方が4以外の偶数であることが必要である。 X_2, X_3 の少なくとも1つが4である (X_2, X_3) の組は、 $(4, X_3)$ の6通りと $(X_2, 4)$ の6通りから重複している $(4, 4)$ を除いた11通りであり、その確率は

$$\frac{11}{6^2} = \frac{11}{36}$$

となる。また、 X_2, X_3 の両方が4以外の偶数である確率は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

となる。したがって求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{11}{36} + \frac{1}{9} &= \frac{15}{36} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

となる。

(4)

$X_1 = 1, 5, 6$ のときで場合分けをして考える。

[1] $X_1 = 1$ のとき

Y は必ず整数となる。よって $X_1 = 1$ のときに Y が整数となる確率は1である。

[2] $X_1 = 5$ のとき

$Y = \frac{X_2 X_3}{X_1}$ が整数となるには、 X_2, X_3 の少なくとも1つが5の倍数である必要がある。余事象を考えると、 X_2, X_3 が両方とも5の倍数でない確率は

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

となる。したがって、 $X_1 = 5$ のときに Y が整数となる確率は

$$1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

となる。

[3] $X_1 = 6$ のとき

$Y = \frac{X_2 X_3}{X_1}$ が整数となるには、 X_2, X_3 の少なくとも1つが6であること、または X_2, X_3 の組 (X_2, X_3) が $(2, 3), (3, 2), (4, 3), (3, 4)$ であることが必要である。 X_2, X_3 の少なくとも1つが6である (X_2, X_3) の組は、 $(6, X_3)$ の6通りと $(X_2, 6)$ の6通りから重複している $(6, 6)$ を除いた11通りである。よって、 $X_1 = 6$ のときに Y が整数となる確率は

$$\frac{11+4}{6^2} = \frac{5}{12}$$

となる。

以上、[1], [2], [3]と(1), (2), (3)より、 Y が整数となる確率は

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{5}{12} + \frac{11}{36} + \frac{5}{12} \right) &= \frac{124}{216} \\ &= \frac{31}{54} \end{aligned}$$

となる。

【解答】

(1)	12	13	14	15	16		
	7	2	–	3	2		
(2)	17	18					
	–	1					
(3)	19	20	21	22	23	24	25
	1	3	8	4	–	1	4

【解説】

(1)

$$AB = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}| = 1 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA}|^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 4 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 4 &= 1 \\ \therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

となる。また、 $BC = |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}| = 4$ より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}|^2 &= 16 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{OB}|^2 - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + |\overrightarrow{OC}|^2 &= 16 \\ \Leftrightarrow 4 - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + 9 &= 16 \\ \therefore \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。点Gは三角形ABCの重心だから

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$

と表せ、 $|\overrightarrow{OG}| = \sqrt{2}$ より

$$\begin{aligned} \left| \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} \right|^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{9} \left(|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} \right) &= 2 \\ \Leftrightarrow 4 + 4 + 9 + 2 \cdot \frac{7}{2} + 2 \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} &= 18 \\ \therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。

(2)

$\overrightarrow{OG}$ と $\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}$ が垂直であるとき

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} \cdot (\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{k}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OB} &= 0 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA}|^2 + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + k\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + k|\overrightarrow{OB}|^2 + k\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4 + \frac{7}{2} - \frac{3}{2} + \frac{7}{2}k + 4k - \frac{3}{2}k &= 0 \\ \Leftrightarrow 6k &= -6 \\ \therefore k &= -1 \end{aligned}$$

となる。

(3)

$$\begin{aligned} |t\overrightarrow{OA} - 2t\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}|^2 &= t^2|\overrightarrow{OA}|^2 + 4t^2|\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 - 4t^2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - 4t\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + 2t\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= 4t^2 + 16t^2 + 9 - 14t^2 + 6t - 3t \\ &= 6t^2 + 3t + 9 \\ &= 6\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{69}{8} \end{aligned}$$

となる。よって $|t\overrightarrow{OA} - 2t\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}|$ は $t = -\frac{1}{4}$ のとき最小値 $\frac{69}{8}$ をとる。 $|t\overrightarrow{OA} - 2t\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| \geq 0$

だから、このとき $|t\overrightarrow{OA} - 2t\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}|$ も最小となる。したがって、 $|t\overrightarrow{OA} - 2t\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}|$ は $t = -\frac{1}{4}$

のとき最小値 $\sqrt{\frac{69}{8}} = \frac{\sqrt{138}}{4}$ をとる。

(1)

合成関数の微分より

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left\{ (4-2\cos x)^{\frac{1}{2}} \right\}' - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} (4-2\cos x)^{-\frac{1}{2}} (4-2\cos x)' - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{4-2\cos x}} \cdot 2\sin x - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{\sin x}{\sqrt{4-2\cos x}} - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{4-2\cos x}} - \frac{1}{2}$$

(2)

 x の定義域に注意して不等式を解く。 $0 \leq x \leq \pi$ より $\sin x \geq 0$ かつ $4-2\cos x \geq 2$ である。 $f'(x) > 0$ を整理して

$$\begin{aligned}
 f'(x) &> 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\sqrt{4-2\cos x}} - \frac{1}{2} &> 0 \\
 \Leftrightarrow \sin x &> \frac{1}{2} \sqrt{4-2\cos x} \\
 \Leftrightarrow \sin^2 x &> \frac{1}{4} (4-2\cos x) \quad (\because \sin x \geq 0, \sqrt{4-2\cos x} \geq 2) \\
 \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x &> 1 - \frac{1}{2} \cos x \\
 \Leftrightarrow \cos^2 x - \frac{1}{2} \cos x &< 0 \\
 \Leftrightarrow \cos x \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) &< 0 \\
 \Leftrightarrow 0 < \cos x < \frac{1}{2} \\
 \therefore \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$$

(3)

(2)と同様にして

$$\begin{aligned}
 f'(x) < 0 &\Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \\
 f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

となる。よって、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$	$\nearrow$	$2 - \frac{\pi}{4}$	$\searrow$	$\sqrt{6} - \frac{\pi}{2}$

増減表より、 $f(x)$ は $x = \frac{\pi}{3}$ で極小値 $\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$ 、 $x = \frac{\pi}{2}$ で極大値 $2 - \frac{\pi}{4}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{前表, 極小値: } \sqrt{3} - \frac{\pi}{6} \left(x = \frac{\pi}{3} \right), \text{ 極大値: } 2 - \frac{\pi}{4} \left(x = \frac{\pi}{2} \right)$$

(1)

部分積分法を用いて

$$\begin{aligned}
 \int_1^e \log x dx &= \int_1^e (x)' \log x dx \\
 &= [x \log x]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= e - [x]_1^e \\
 &= e - e + 1 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \int_1^e \log x dx = 1$$

(2)

部分積分法を用いて

$$\begin{aligned}
 \int_1^e (\log x)^2 dx &= \int_1^e (x)' (\log x)^2 dx \\
 &= [x (\log x)^2]_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= e - 2 \int_1^e \log x dx \\
 &= e - 2 \left(\because \int_1^e \log x dx = 1 \right)
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \int_1^e (\log x)^2 dx = e - 2$$

(3)

部分積分法を用いて

$$\begin{aligned}
 \int_1^e x \log x dx &= \int_1^e \left(\frac{1}{2} x^2 \right)' \log x dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} x^2 \log x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \int_1^e x dx \\
 &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^e \\
 &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{e^2 + 1}{4}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \int_1^e x \log x dx = \frac{e^2 + 1}{4}$$

(4)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_1^e \log(xt) f(t) dt + x \\
 &= \int_1^e (\log t + \log x) f(t) dt + x \\
 &= \int_1^e f(t) \log t dt + (\log x) \int_1^e f(t) dt + x
 \end{aligned}$$

と変形できる。 $\int_1^e f(t) dt = A$, $\int_1^e f(t) \log t dt = B$ (A, B は定数)とおくと,

$$f(x) = A \log x + x + B$$

となる。よって,

$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^e f(t) dt \\
 &= \int_1^e (A \log t + t + B) dt \\
 &= A \int_1^e \log t dt + \int_1^e t dt + B \int_1^e dt \\
 &= A + \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_1^e + B [t]_1^e \\
 &= A + \frac{e^2 - 1}{2} + (e - 1)B
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (e - 1)B = -\frac{(e + 1)(e - 1)}{2}$$

$$\therefore B = -\frac{e + 1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \int_1^e f(t) \log t dt \\
 &= \int_1^e (A \log t + t + B) \log t dt \\
 &= A \int_1^e (\log t)^2 dt + \int_1^e t \log t dt + B \int_1^e \log t dt \\
 &= (e - 2)A + B + \frac{e^2 + 1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (e - 2)A = -\frac{e^2 + 1}{4}$$

$$\therefore A = -\frac{e^2 + 1}{4(e - 2)}$$

となる。したがって,

$$f(x) = -\frac{e^2 + 1}{4(e - 2)} \log x + x - \frac{e + 1}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) f(x) = -\frac{e^2 + 1}{4(e - 2)} \log x + x - \frac{e + 1}{2}$$

(1)

円 C の方程式に直線 l の方程式を代入すると

$$\begin{aligned}(x-5)^2 + (mx)^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + m^2 x^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow (m^2 + 1)x^2 - 10x + 20 &= 0 \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。 $m^2 + 1 > 0$ より、この x の 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (-5)^2 - 20(m^2 + 1) \\ &= 25 - 20m^2 - 20 \\ &= 5 - 20m^2\end{aligned}$$

となる。円 C と直線 l が共有点を持つための条件は $D \geq 0$ だから、求める m の範囲は

$$\begin{aligned}5 - 20m^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 20m^2 &\leq 5 \\ \Leftrightarrow m^2 &\leq \frac{1}{4} \\ \therefore -\frac{1}{2} &\leq m \leq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$$

(2)

点 P, Q の x 座標をそれぞれ p, q とし、点 M の座標を (x, y) とする。 p, q は 2 次方程式①の

2 つの実数解であるため、解と係数の関係より、 $p + q = \frac{10}{m^2 + 1}$ が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned}x &= \frac{p+q}{2} \\ &= \frac{5}{m^2 + 1}\end{aligned}$$

となる。また、 M は直線 l 上にあるから

$$\begin{aligned}y &= mx \\ &= \frac{5m}{m^2 + 1}\end{aligned}$$

と求められる。したがって、点 M の座標は $\left(\frac{5}{m^2 + 1}, \frac{5m}{m^2 + 1}\right)$ となる。

$$(\text{答}) \quad M\left(\frac{5}{m^2 + 1}, \frac{5m}{m^2 + 1}\right)$$

(3)

(1)より $x = \frac{5}{m^2 + 1}$ のとりうる範囲を求めると、 $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$ より $4 \leq x \leq 5$ となる。 $x = \frac{5}{m^2 + 1}$

を m^2 について解くと

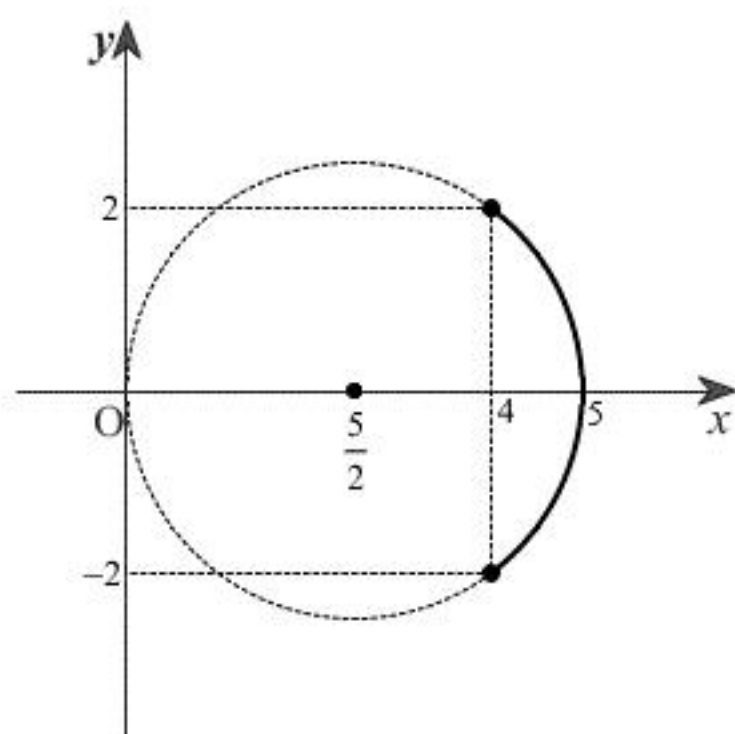
$$\begin{aligned}x &= \frac{5}{m^2 + 1} \\ \Leftrightarrow m^2 + 1 &= \frac{5}{x} \quad (\because x > 0) \\ \Leftrightarrow m^2 &= \frac{5}{x} - 1\end{aligned}$$

となり、 $y = mx$ より

$$\begin{aligned}y^2 &= m^2 x^2 \\ \Leftrightarrow y^2 &= x^2 \left(\frac{5}{x} - 1\right) \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x + y^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 &= \frac{25}{4}\end{aligned}$$

となる。よって、点 M は円 $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4}$ の $4 \leq x \leq 5$ の部分にある。逆に、この円弧上に

ある任意の点は条件を満たす。したがって、求める軌跡は円 $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4}$ の $4 \leq x \leq 5$ の部分である。これを図示すると下図の太線部分のようになる。ただし端点を含む。

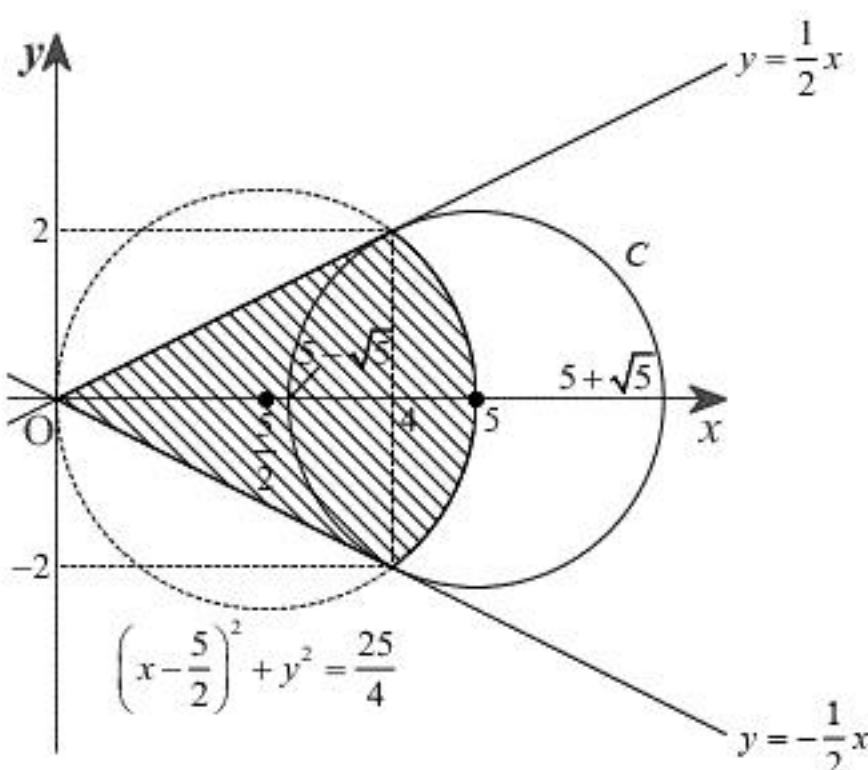


$$(\text{答}) \quad \text{円} \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4} \text{ の } 4 \leq x \leq 5 \text{ の部分, 前図}$$

(4)

2 次方程式①の判別式 D は $m = \pm \frac{1}{2}$ のときに 0 となるから、原点から C に引いた 2 本の接線

は $y = \frac{1}{2}x$, $y = -\frac{1}{2}x$ である。よって、図形 D は下図の斜線部である。



図形 D の $0 \leq x \leq 4$ の部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体は高さが 4、底面の円の半径が 2 である円錐だから、求める体積 V は

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} \pi \cdot 2^2 \cdot 4 + \pi \int_4^5 y^2 dx \\ &= \frac{16}{3} \pi + \pi \int_4^5 (-x^2 + 5x) dx \\ &= \frac{16}{3} \pi + \pi \left[-\frac{1}{3} x^3 + \frac{5}{2} x^2 \right]_4^5 \\ &= \frac{16}{3} \pi + \pi \left(-\frac{125}{3} + \frac{125}{2} + \frac{64}{3} - 40 \right) \\ &= \frac{15}{2} \pi\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{15}{2} \pi$$