

【解答】

(1)	1	2	3
	2	2	0
(2)	4	5	
	6	0	
(3)	6	7	
	5	2	
(4)	8	9	10
	1	2	0

【解説】

(1)

A から L の 12 個の頂点から 3 点を選べばよいから、求める個数は、

$${}_{12}C_3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220 \text{ (個)}$$

である。

(2)

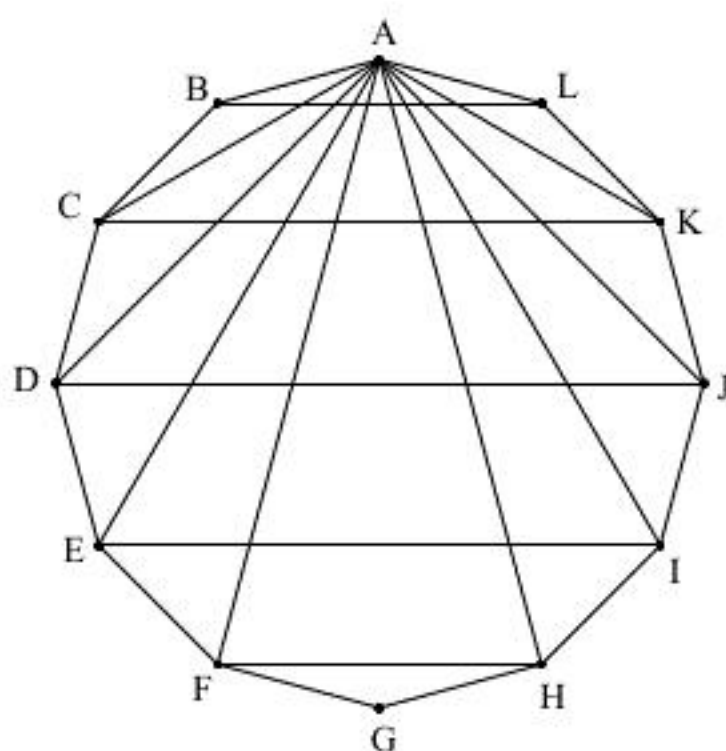
直角三角形となるには、斜辺がこの正十二角形の外接円の直径となればよい。斜辺の選び方は 6 通りあり、1 本の斜辺に対して残りの 1 つの頂点は 10 個のうち 1 つ選べばよいから、求める個数は、

$$6 \cdot 10 = 60 \text{ (個)}$$

である。

(3)

A から L の 12 個の頂点から 1 点選び、その点を二等辺三角形の頂点とすることを考える。1 つの頂点に対してできる二等辺三角形は以下の図のようになる。



上図より、1 つの頂点に対してできる二等辺三角形は 5 個である。このうち正三角形でない 4 個は、他の点を頂点として二等辺三角形を作ったときに重複が起こらない。よって、正十二角形の頂点から 3 点を選んで作った三角形のうち、正三角形でない二等辺三角形は、

$$4 \cdot 12 = 48 \text{ (個)}$$

である。また、正三角形は $\triangle AEI$, $\triangle LDH$, $\triangle KCG$, $\triangle JBF$ の 4 通りできるから、求める個数は、

$$48 + 4 = 52 \text{ (個)}$$

である。

(4)

直角二等辺三角形は 1 つの頂点に対して 1 個できるから、その個数は 12 個である。よって、(1), (2), (3) より、求める個数は、

$$220 - 60 - 52 + 12 = 120 \text{ (個)}$$

である。

【解答】

(1)	11	12	13
	–	1	4
(2)	14	15	
	0	1	
(3)	16	17	
	1	4	

【解説】

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2ax + b \\ &= (x+a)^2 - a^2 + b \end{aligned}$$

より、放物線 $y = f(x)$ の頂点 P の座標は $(-a, -a^2 + b)$ である。ここで、この点 P が直線 $y = x$ 上にあるから、

$$\begin{aligned} -a^2 + b &= -a \\ \therefore b &= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。よって、 a が実数全体を動くから、 b の最小値は $-\frac{1}{4}$ である。

(2)

$g(x) = f(f(x))$ であるから、(1)より、

$$\begin{aligned} g(0) &= f(f(0)) \\ &= f(b) \\ &= f(a^2 - a) \\ &= \{(a^2 - a) + a\}^2 - a^2 + (a^2 - a) \\ &= a^4 - a \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} g(0) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow a^4 - a &\leq 0 \\ \Leftrightarrow a(a-1)(a^2+a+1) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow a(a-1)\left\{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right\} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow a(a-1) &\leq 0 \\ \therefore 0 &\leq a \leq 1 \end{aligned}$$

が得られる。

(3)

放物線 $y = f(x)$ と直線 $y = x$ の共有点の x 座標は、

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ \Leftrightarrow x^2 + 2ax + b &= x \\ \Leftrightarrow x^2 + (2a-1)x + a^2 - a &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+a)(x+a-1) &= 0 \\ \therefore x &= -a, -a+1 \end{aligned}$$

である。ここで、点 P の x 座標は $-a$ であるから、 $c = -a+1$ である。よって、

$$a+c=1$$

が得られる。また、

$$\begin{cases} g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x) \\ f'(x) = 2x + 2a \end{cases}$$

より、

$$\begin{aligned} g'(c) &= f'(f(c)) \cdot f'(c) \\ &= (2f(c) + 2a) \cdot (2a + 2c) \\ &= 4(a+c)^2 \quad (\because c = f(c)) \\ &= 4 \end{aligned}$$

となる。

(1)

$$\begin{aligned}
 |\overrightarrow{AB}|^2 &= |\vec{b} - \vec{a}|^2 \\
 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\
 &= 1^2 + 2^2 - 2 \cdot \frac{2}{3} \\
 &= 1 + 4 - \frac{4}{3} \\
 &= \frac{11}{3}
 \end{aligned}$$

より、 $AB > 0$ であるから、 $AB = \sqrt{\frac{11}{3}} = \frac{\sqrt{33}}{3}$ となる。

$$(\text{答}) \quad AB = \frac{\sqrt{33}}{3}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \\
 \Leftrightarrow \frac{2}{3} &= 1 \cdot 2 \cdot \cos \theta \\
 \therefore \cos \theta &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

となる。よって、 $0 < \theta < \pi$ より、 $\sin \theta > 0$ であるから、

$$\begin{aligned}
 \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\
 &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \\
 &= \frac{2\sqrt{2}}{3}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(3)

線分 CD の中点が B であるから、

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} \\
 &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CB} \\
 &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \\
 &= \vec{b} + \vec{b} - (\vec{a} + \vec{b}) \\
 &= \vec{b} - \vec{a}
 \end{aligned}$$

である。また、E は直線 AC 上にあるから、実数 k を用いて、

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AC} \\
 &= \vec{a} + k\vec{b}
 \end{aligned}$$

と表せる。ここで、 $ED \perp OC$ より、

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{OC} &= 0 \\
 \Leftrightarrow (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OE}) \cdot \overrightarrow{OC} &= 0 \\
 \Leftrightarrow (\vec{b} - \vec{a} - \vec{a} - k\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) &= 0 \\
 \Leftrightarrow -2|\vec{a}|^2 + (-k+1)|\vec{b}|^2 + (-k-1)\vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\
 \Leftrightarrow -2 \cdot 1^2 + (-k+1) \cdot 2^2 + (-k-1) \cdot \frac{2}{3} &= 0 \\
 \Leftrightarrow -2 - 4k + 4 - \frac{2}{3}k - \frac{2}{3} &= 0 \\
 \therefore k &= \frac{2}{7}
 \end{aligned}$$

となる。よって、 $\overrightarrow{OE} = \vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b}$ である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OE} = \vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b}$$

(4)

(3)より、 $\overrightarrow{OE} = \vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b}$ であるから、 $\triangle OCE$ の面積を S とすると、

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OC}|^2 |\overrightarrow{OE}|^2 - (\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OE})^2} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a} + \vec{b}|^2 \left| \vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b} \right|^2 - \left\{ (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \left(\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b} \right) \right\}^2} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \right) \left(|\vec{a}|^2 + \frac{4}{7}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{4}{49}|\vec{b}|^2 \right) - \left(|\vec{a}|^2 + \frac{9}{7}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{2}{7}|\vec{b}|^2 \right)^2} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(1^2 + 2 \cdot \frac{2}{3} + 2^2 \right) \left(1^2 + \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{49} \cdot 2^2 \right) - \left(1^2 + \frac{9}{7} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{7} \cdot 2^2 \right)^2} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{19}{3} \cdot \frac{251}{147} - 9} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{800}{441}} \\
 &= \frac{10\sqrt{2}}{21}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{10\sqrt{2}}{21}$$

(1)

$a = -\frac{1}{2}$ のとき,

$$\begin{cases} C: x^2 + y^2 = \frac{5}{4} \\ \ell: 2x + y = \frac{5}{2} \end{cases}$$

であるから、 C と ℓ の共有点の x 座標は,

$$\begin{aligned} x^2 + \left(-2x + \frac{5}{2}\right)^2 &= \frac{5}{4} \\ \Leftrightarrow 5x^2 - 10x + 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow 5(x-1)^2 &= 0 \\ \therefore x &= 1 \end{aligned}$$

である。よって、 $a = -\frac{1}{2}$ のとき、 C と ℓ の共有点の座標は $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ である。

(答) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

(2)

正の実数 d を用いて、 C の中心と ℓ との距離を d とすると、 C と ℓ が共有点をもつためには、 $d \leq (C \text{ の半径})$ であればよい。ここで、 $C: x^2 + y^2 = a^2 + 1$ であるから、 C の半径は、

$$\sqrt{a^2 + 1}$$

であり、また、 C の中心 $(0, 0)$ と $\ell: 2x + y = -3a + 1$ との距離 d は、

$$d = \frac{|2 \cdot 0 + 0 + 3a - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|3a - 1|}{\sqrt{5}}$$

であるから、求める a の範囲は、

$$\begin{aligned} \frac{|3a - 1|}{\sqrt{5}} &\leq \sqrt{a^2 + 1} \\ \Leftrightarrow (3a - 1)^2 &\leq 5a^2 + 5 \\ \Leftrightarrow 4a^2 - 6a - 4 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (2a + 1)(a - 2) &\leq 0 \\ \therefore -\frac{1}{2} &\leq a \leq 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $-\frac{1}{2} \leq a \leq 2$

(3)

(2)より、整数 a としてあり得るのは $a = 0, 1, 2$ である。以下、 a の値で場合分けして考える。

[1] $a = 0$ のとき

$$\begin{cases} C: x^2 + y^2 = 1 \\ \ell: 2x + y = 1 \end{cases}$$

であるから、 C と ℓ の共有点の x 座標は、

$$\begin{aligned} x^2 + (-2x + 1)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x(5x - 4) &= 0 \\ \therefore x &= 0, \frac{4}{5} \end{aligned}$$

となる。このうち整数であるのは $x = 0$ であり、このとき共有点の y 座標は $y = 1$ となるから、条件を満たす。

[2] $a = 1$ のとき

$$\begin{cases} C: x^2 + y^2 = 2 \\ \ell: 2x + y = -2 \end{cases}$$

であるから、 C と ℓ の共有点の x 座標は、

$$\begin{aligned} x^2 + (-2x - 2)^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow 5x^2 + 8x + 2 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{-4 \pm \sqrt{6}}{5} \end{aligned}$$

となり、条件を満たさない。

[3] $a = 2$ のとき

$$\begin{cases} C: x^2 + y^2 = 5 \\ \ell: 2x + y = -5 \end{cases}$$

であるから、 C と ℓ の共有点の x 座標は、

$$\begin{aligned} x^2 + (-2x - 5)^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow 5(x + 2)^2 &= 0 \\ \therefore x &= -2 \end{aligned}$$

となる。このとき共有点の y 座標は $y = -1$ となるから、条件を満たす。

以上[1], [2], [3]より、条件を満たすのは、

$$\begin{aligned} a = 0 \text{ のとき } (x, y) &= (0, 1) \\ a = 2 \text{ のとき } (x, y) &= (-2, -1) \end{aligned}$$

である。

(答) $a = 0$ のとき $(x, y) = (0, 1)$ 、 $a = 2$ のとき $(x, y) = (-2, -1)$

(1)

$$\begin{aligned}
 \int_0^a \frac{1}{1-t^2} dt &= \int_0^a \frac{1}{(1-t)(1+t)} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^a \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt \\
 &= \frac{1}{2} \left[-\log(1-t) + \log(1+t) \right]_0^a \\
 &= \frac{1}{2} \log \frac{1+a}{1-a}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} \log \frac{1+a}{1-a}$$

(2)

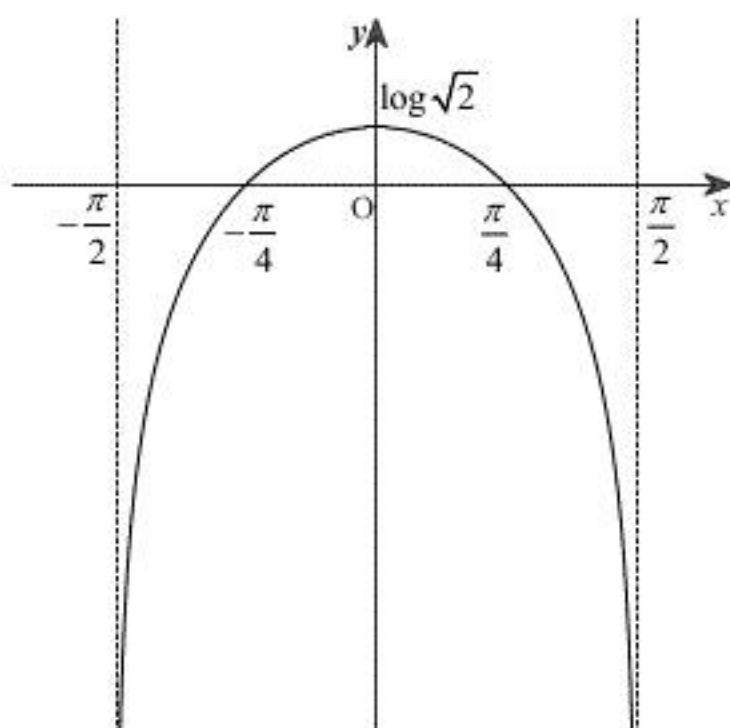
$$f(x) = \log(\sqrt{2} \cos x) \text{ より,}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{-\sqrt{2} \sin x}{\sqrt{2} \cos x} \\
 &= -\tan x
 \end{aligned}$$

であるから、 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$\nearrow$	$+$	0	$-$	$\searrow$
$f(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	$\log \sqrt{2}$	$\searrow$	$(-\infty)$

よって、グラフの概形は以下のようになる。



(答) 前図

(3)

(2)のグラフより、 $y = f(x)$ のうち $x \geq 0, y \geq 0$ を満たすのは、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ の部分である。よって、求める曲線の長さを L とすると、

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2 x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $t = \sin x$ とすると、 $dt = \cos x dx$ であり、また、

x	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$
t	0	$\rightarrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

であるから、

$$L = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-t^2} dt$$

となる。よって、(1)より、 $\int_0^a \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \log \frac{1+a}{1-a}$ であるから、

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2} \log \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \\
 &= \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \\
 &= \frac{1}{2} \log (\sqrt{2} + 1)^2 \\
 &= \log (\sqrt{2} + 1)
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \log(\sqrt{2} + 1)$$