

【解答】

(1)	1.	3	0	0		
		4	5	6		
	2.	3	3	0		
		7	8	9		
	3.	9	3	0		
(2)		10	11			
		7	3			
(3)		12	13	14	15	16
		4	8	2	2	2
(4)		17	18	19	20	21
		1	3	3	1	1
(5)		22	23	24		
		1	4	8		
(6)	1.	25	26			
		2	3			
	2.	27	28			
		3	3			

解説]

1.

4 の倍数となる自然数は、自然数 p を用いて、
は 10 から 50 ままであるから、

【解説】

(1) 1.

4の倍数となる自然数は、自然数 p を用いて、 $4p$ と表せる。このとき、考える自然数の範囲は10から50までであるから、

$$10 \leq 4p \leq 50$$

$$\therefore \frac{5}{2} \leq p \leq \frac{25}{2}$$

より、自然数 p の取りうる値の範囲は、 $3 \leq p \leq 12$ である。よって、4の倍数の和は、

$$\sum_{p=3}^{12} 4p = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (3+12) \cdot 10 = 300$$

である。

2.

4で割って2余る自然数は、自然数 q を用いて、 $4q-2$ と表せる。このとき、考える自然数の範囲は10から50までであるから、

$$10 \leq 4q-2 \leq 50$$

$$\therefore 3 \leq q \leq 13$$

より、自然数 q の取りうる値の範囲は、 $3 \leq q \leq 13$ である。よって、4で割って2余る数の和は、

$$\sum_{q=3}^{13} (4q-2) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (3+13) \cdot 11 - 2 \cdot 11 = 330$$

である。

3.

自然数は、4の倍数または4で割り切れない数のいずれかに分類される。ゆえに、10から50までの自然数のうち、4で割り切れない数の和は、10から50までの自然数の和から、10から50までの4の倍数の和を引いた値に等しい。よって、(1) 1.より、

$$\frac{1}{2} \cdot (10+50) \cdot 41 - 300 = 930$$

である。

(2)

抜いたカードにかかれた自然数を k (k は $1 \leq k \leq n$ を満たす自然数)とする。このとき、抜いたカード以外のカードにかかれた合計が25であるから、

$$\sum_{i=1}^n i - k = 25$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} n(n+1) - k = 25$$

$$\therefore k = \frac{1}{2} n(n+1) - 25 \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。ここで、 $1 \leq k \leq n$ より、

$$1 \leq \frac{1}{2} n(n+1) - 25 \leq n$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq n(n+1) - 50 \leq 2n$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n^2 - n - 50 \leq 0 \\ n^2 + n - 52 \geq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 1 \leq n \leq \frac{1+\sqrt{201}}{2} \\ \frac{\sqrt{209}-1}{2} \leq n \end{cases} \quad (\because n \geq 1)$$

が得られる。ここで、 $14 = \sqrt{196} < \sqrt{201} < \sqrt{209} < \sqrt{225} = 15$ より、

$$\frac{15-1}{2} > \frac{\sqrt{209}-1}{2} > \frac{14-1}{2}, \frac{1+14}{2} < \frac{1+\sqrt{201}}{2} < \frac{1+15}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{13}{2} < \frac{\sqrt{209}-1}{2} < 7, \frac{15}{2} < \frac{1+\sqrt{201}}{2} < 8$$

$$\therefore 6 < \frac{\sqrt{209}-1}{2} < 7 < \frac{1+\sqrt{201}}{2} < 8$$

であるから、 $n=7$ が必要である。逆に、 $n=7$ のとき、 $\textcircled{1}$ より、 $k=3$ となり、これは $1 \leq k \leq 7$ を満たすから適する。よって、 n は7であり、抜いたカードにかかれた数字は3である。

(3)

$3374850 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 149 \cdot 151$ であるから、 3374850 の正の約数の個数は、

$$(1+1)(1+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 48$$

である。また、100未満の正の約数は、

$$1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75$$

であるから、総和は、

$$1+2+3+5+6+10+15+25+30+50+75 = 222$$

である。

(4)

$$\frac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}} = \frac{a^{6x}-1}{a^{4x}-a^{2x}}$$

$$= \frac{(a^{2x}-1)(a^{4x}+a^{2x}+1)}{a^{2x}(a^{2x}-1)}$$

$$= \frac{a^{4x}+a^{2x}+1}{a^{2x}} \quad (\because a^{2x}-1 \neq 0)$$

$$= \frac{(a^{2x})^2+a^{2x}+1}{a^{2x}}$$

$$= \frac{11^2+11+1}{11}$$

$$= \frac{133}{11}$$

である。

(5)

真数条件より、 $2x > 0, \frac{4}{x} > 0$ であるから、 $x > 0$ である。このとき、

$$(\log_2 2x) \left(\log_{\frac{4}{x}} \frac{4}{x} \right) \leq 4$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x + 1) \left(-\log_2 \frac{4}{x} \right) \leq 4$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x + 1)(\log_2 x - 2) \leq 4$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x)^2 - \log_2 x - 6 \leq 0$$

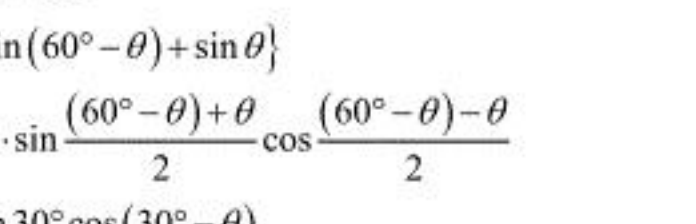
$$\Leftrightarrow (\log_2 x + 2)(\log_2 x - 3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq \log_2 x \leq 3$$

$$\therefore \frac{1}{4} \leq x \leq 8$$

となる。これは、 $x > 0$ を満たすから、求める範囲は $\frac{1}{4} \leq x \leq 8$ である。

(6) 1.



上図のように $\angle B = 120^\circ$ とした $\triangle ABC$ を用いて考えても、一般性を失わない。このとき、 $\angle A = \theta$ とすると、 θ は $0 < \theta < 60^\circ$ を満たし、かつ、三角形の内角の和より $\angle C = 60^\circ - \theta$ である。また、 $\triangle ABC$ は半径1の円に内接する三角形であるから、正弦定理より、

$$\begin{cases} AB = 2 \sin(60^\circ - \theta) \\ BC = 2 \sin \theta \\ CA = 2 \sin 120^\circ = \sqrt{3} \end{cases}$$

となる。したがって、3辺の長さの和を $f(\theta)$ とすると、

$$f(\theta) = AB + BC + CA$$

$$= \sqrt{3} + 2 \{ \sin(60^\circ - \theta) + \sin \theta \}$$

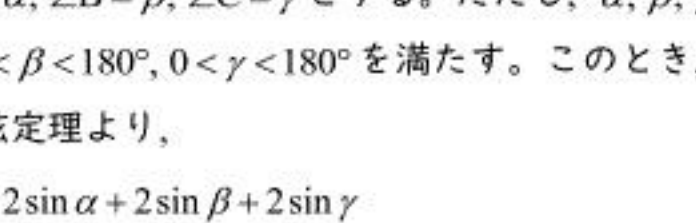
$$= \sqrt{3} + 2 \cdot 2 \cdot \sin \frac{(60^\circ - \theta) + \theta}{2} \cos \frac{(60^\circ - \theta) - \theta}{2}$$

$$= \sqrt{3} + 4 \sin 30^\circ \cos(30^\circ - \theta)$$

$$= \sqrt{3} + 2 \cos(30^\circ - \theta)$$

である。よって、 $0 < \theta < 60^\circ$ において、 $\cos(30^\circ - \theta)$ は $0 < \theta \leq 30^\circ$ で単調増加し、 $30^\circ \leq \theta < 60^\circ$ で単調減少するから、 $f(\theta)$ の最大値は、 $\theta = 30^\circ$ のとき、 $2 + \sqrt{3}$ である。

2.



$\triangle ABC$ において、 $\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$ とする。ただし、 α, β, γ は $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ を満たし、かつ $0 < \alpha < 180^\circ, 0 < \beta < 180^\circ, 0 < \gamma < 180^\circ$ を満たす。このとき、3辺の長さの和は、(6) 1.と同様に考えると、正弦定理より、

$$AB + BC + CA = 2 \sin \alpha + 2 \sin \beta + 2 \sin \gamma$$

$$= 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 4 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$= 4 \sin \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2} \right) \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 4 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \quad (\because \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ)$$

$$= 4 \cos \frac{\gamma}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \right)$$

となる。このとき、 β, γ を固定したときの3辺の長さの和が最大となるのは、 $\alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$ となる α, β が存在することより、 $\alpha = \beta$ となる時である。また、最大値は

$4 \cos \frac{\gamma}{2} \left(1 + \sin \frac{\gamma}{2} \right)$ であるから、 β の固定を外したときの最大値もまた $4 \cos \frac{\gamma}{2} \left(1 + \sin \frac{\gamma}{2} \right)$ である。同様に、 γ, α および α, β を固定したときについても、和が最大となる場合を考えることで、 $\alpha = \beta = \gamma$ が得られるから、 $\triangle ABC$ は正三角形である。よって、求める最大値は、

$$4 \cos \frac{60^\circ}{2} \left(1 + \sin \frac{60^\circ}{2} \right) = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \right) = 3\sqrt{3}$$

である。

Ⅱ

【解答】

(1)	1.	29	30								
		1	3								
	2.	31	32	33	34	35	36				
		8	3	9	8	3	9				
(2)	1.	37									
		1									
	2.	38									
		1									
	3.	39	40								
		1	2								
(1)	1.	41	42	43	44	45					
		4	4	9	2	0					
	2.	46	47	48	49	50	51	52			
		1	2	3	4	6	3	6			
	3.	53	54	55	56	57	58	59	60	61	
		1	0	3	1	1	3	1	1	0	

【解説】

(1)1.

$-\frac{11}{2}\pi \leq x \leq \frac{15}{2}\pi$ における $y = \cos \frac{x}{2}$ と $y = \cos \frac{3}{2}x$ のグラフの共有点の個数は、

$\cos \frac{x}{2} = \cos \frac{3}{2}x$ $\left(-\frac{11}{2}\pi \leq x \leq \frac{15}{2}\pi\right)$ の実数解の個数に等しい。このとき、 $\cos \frac{x}{2} = \cos \frac{3}{2}x$ を解く

と、

$$\begin{aligned} \cos \frac{x}{2} &= \cos \frac{3}{2}x \\ \Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} &= 4\cos^3 \frac{x}{2} - 3\cos \frac{x}{2} \\ \Leftrightarrow 4\cos \frac{x}{2} \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\cos \frac{x}{2} \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) \left(1 + \cos \frac{x}{2}\right) &= 0 \\ \therefore x &= 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \pm4\pi, \pm5\pi, 6\pi, 7\pi \left(\because -\frac{11}{2}\pi \leq x \leq \frac{15}{2}\pi\right) \end{aligned}$$

となる。よって、求める共有点の個数は13個である。

2.

$\cos \frac{x}{2} = t$ とすると、 $-\frac{11}{2}\pi \leq x \leq \frac{15}{2}\pi$ より、 t の取りうる値の範囲は $-1 \leq t \leq 1$ である。このとき、(1)1.より、 $y = -4t^3 + 4t$ であるから、

$$y' = -12t^2 + 4 = -12\left(t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

となる。よって、 $-1 \leq t \leq 1$ における $y = -4t^3 + 4t$ の増減表は以下のようになる。

t	-1	...	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	1
y'		-	0	+	0	-	
y	0	$\searrow$	$-\frac{8\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	$\frac{8\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0

したがって、最大値は $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ 、最小値は $-\frac{8\sqrt{3}}{9}$ である。

(2)1.

$$4^{10} \equiv 1^{10} \equiv 1 \pmod{3}$$

より、 4^{10} を3で割った余りは1である。

2.

$$8^{10} \equiv 1^{10} \equiv 1 \pmod{7}$$

より、 8^{10} を7で割った余りは1である。

3.

数列 x_n の定義より、 $n \geq 2$ において x_n は偶数であるから、整数 k を用いて $x_{2020} = 2k$ と表せる。よって、 $x_{2021} = 2^{x_{2020}} = 2^{2k}$ より、

$$2^{2k} \equiv (-1)^{2k} \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{3}$$

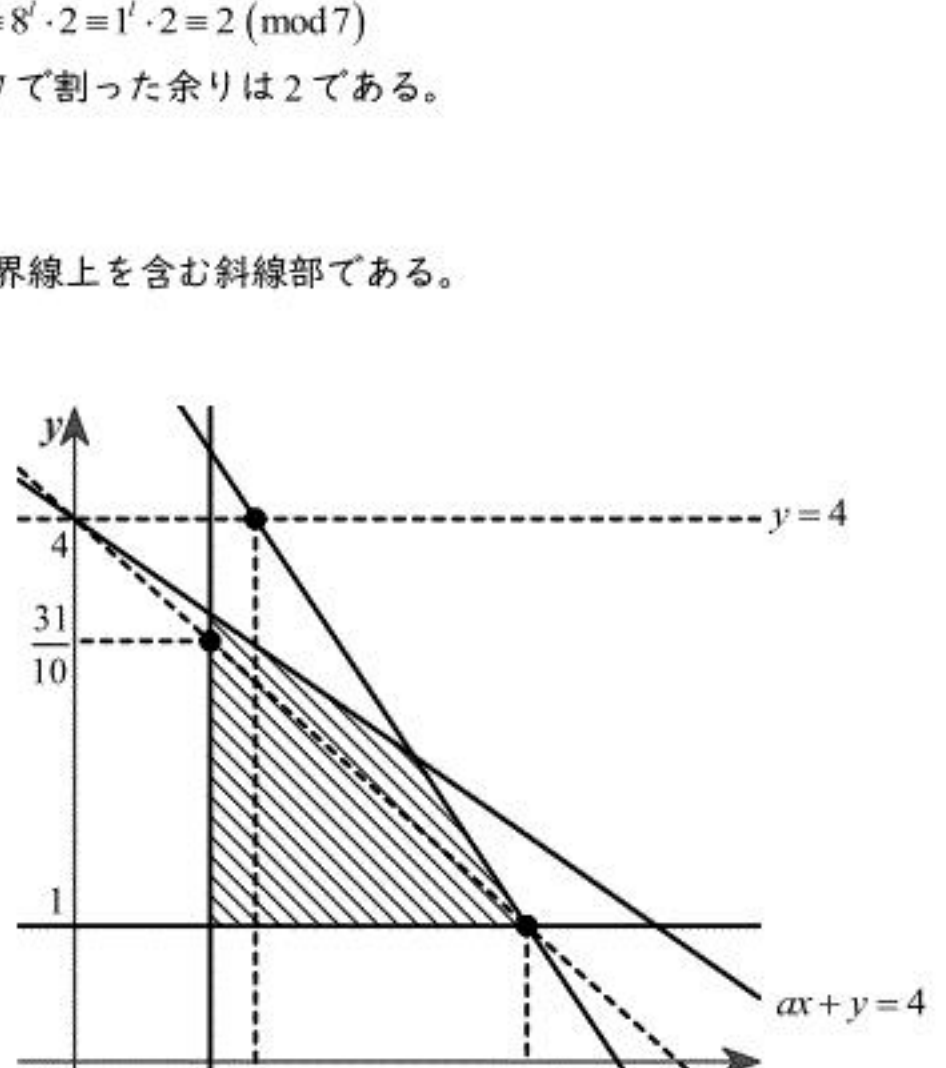
であるから、 x_{2021} を3で割った余りは1である。このとき、整数 l を用いて、 $x_{2021} = 3l+1$ と表せる。よって、 $x_{2022} = 2^{x_{2021}} = 2^{3l+1}$ となり、

$$2^{3l+1} \equiv 2^{3l} \cdot 2 \equiv 8^l \cdot 2 \equiv 1^l \cdot 2 \equiv 2 \pmod{7}$$

であるから、 x_{2022} を7で割った余りは2である。

(3)1.

S は下図における境界線上を含む斜線部である。



このとき、 $ax+y=4$ について、 $a=0$ のとき $y=4$ であること、 $a=0.9$ のときに $0.9x+y=4$ は $3x+2y=12$ と $y=1$ の交点 $\left(\frac{10}{3}, 1\right)$ を通ることに注意すると、 $0 \leq a \leq 0.9$ の範囲で S の面積は

a について単調減少である。よって、 $a=0$ のとき、 S の面積は最大値

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{7}{3}\right) \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

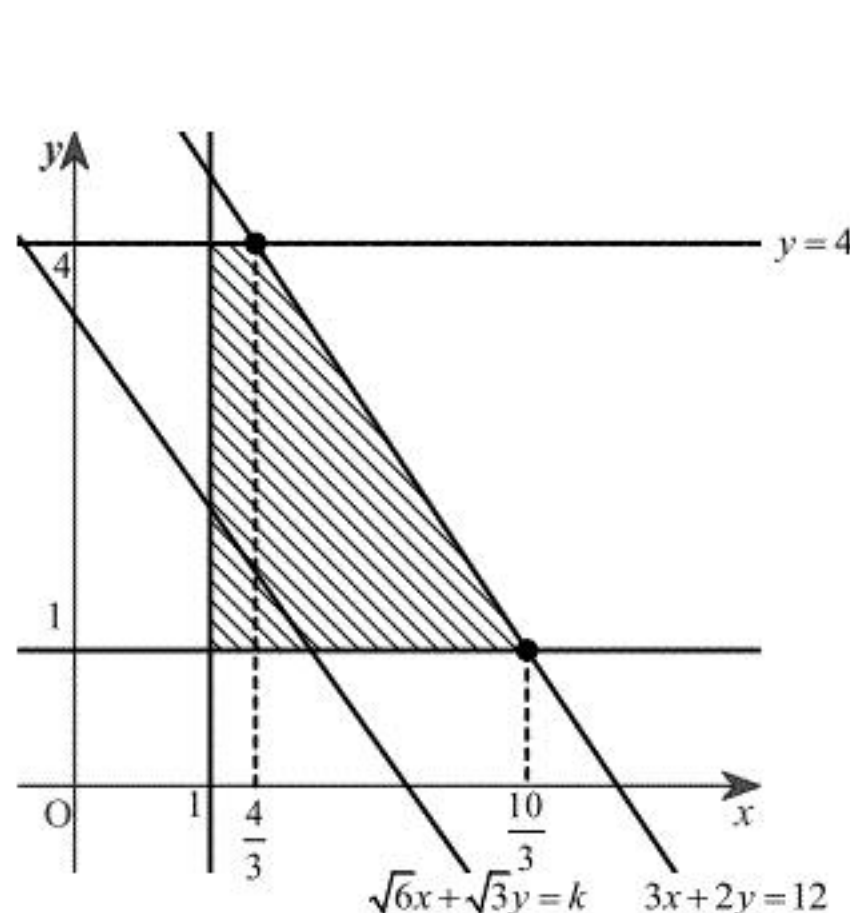
をとる。また、 $a=0.9$ のとき、最小値

$$\frac{7}{3} \cdot \frac{21}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{49}{20}$$

をとる。

2.

S の面積が最大となるとき、すなわち $a=0$ のとき、 S は下図における境界線上を含む斜線部である。



$\sqrt{6}x + \sqrt{3}y = k$ とすると、

$$\begin{aligned} \sqrt{6}x + \sqrt{3}y &= k \\ \Leftrightarrow y &= -\sqrt{2}x + \frac{k}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

となり、これは傾き $-\sqrt{2}$ 、 y 切片 $\frac{k}{\sqrt{3}}$ の直線を表す。ここで、傾きについて $-\frac{3}{2} < -\sqrt{2} < 0$ であるから、 k が最大値をとる、つまり、 $\frac{k}{\sqrt{3}}$ が最大値をとるのは $\sqrt{6}x + \sqrt{3}y = k$ が点 $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$ を通るときであり、このときの k の値は、

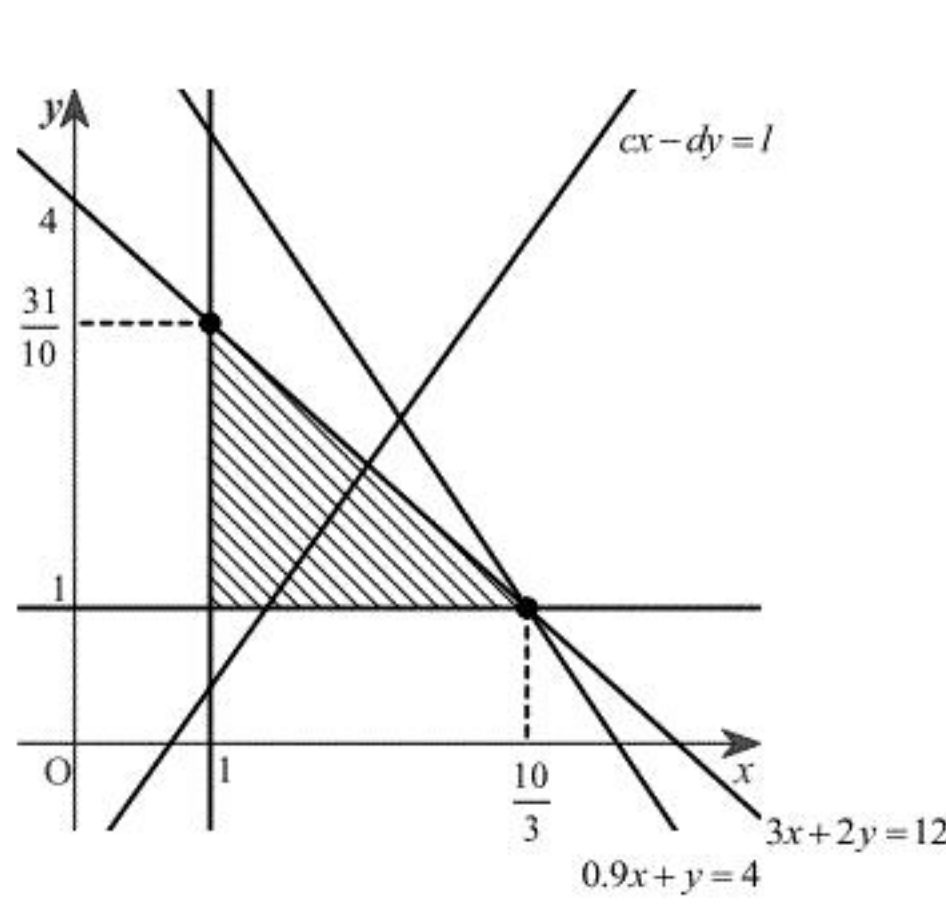
$$\frac{4\sqrt{6}}{3} + 4\sqrt{3} = \frac{12\sqrt{3} + 4\sqrt{6}}{3}$$

である。また、 k が最小値をとる、つまり、 $\frac{k}{\sqrt{3}}$ が最小値をとるのは $\sqrt{6}x + \sqrt{3}y = k$ が点 $(1, 1)$ を通るときであり、このときの k の値は $\sqrt{3} + \sqrt{6}$ である。以上より、 $\sqrt{6}x + \sqrt{3}y$ の最大値は

$$\frac{12\sqrt{3} + 4\sqrt{6}}{3}, \text{ 最小値は } \sqrt{3} + \sqrt{6} \text{ である。}$$

3.

S の面積が最小となるとき、すなわち $a=0.9$ のとき、 S は下図における境界線上を含む斜線部である。



$cx - dy = l$ とすると、

$$\begin{aligned} cx - dy &= l \\ \Leftrightarrow y &= \frac{c}{d}x - \frac{l}{d} \quad (\because d > 0) \end{aligned}$$

となり、これは傾き $\frac{c}{d}$ 、 y 切片 $-\frac{l}{d}$ の直線を表す。ここで、傾きについて

$\frac{c}{d} > 0$ ($\because c > 0, d > 0$)であるから、 l が最大値をとる、つまり、 $-\frac{l}{d}$ が最小値をとるのは

$cx - dy = l$ が点 $\left(\frac{10}{3}, 1\right)$ を通るときである。また、 l が最小値をとる、つまり、 $-\frac{l}{d}$ が最大値をとるのは $cx - dy = l$ が点 $\left(1, \frac{31}{10}\right)$ を通るときである。以上より、 $cx - dy$ は $x = \frac{10}{3}, y = 1$ で最大

値をとり、 $x = 1, y = \frac{31}{10}$ で最小値をとる。

Ⅲ

【解答】

(1)		62	63	64	65	66	67					
		4	1	4	9	9	7					
(2)	1.	68	69	70	71	72	73	74	75			
		2	1	6	4	4	3	6	4			
	2.	76	77									
		3	6									
(1)	1.	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	
		1	3	6	5	3	6	4	3	6	5	
	2.	88	89	90								
		2	5	3								

【解説】

(1)

PCR 検査を受けて陽性となる場合は、感染している人が陽性と判断される場合と、感染していない人が誤って陽性となる場合のいずれかである。また、ウイルスに感染していない確率は $\frac{99}{100}$ 、感染していない人が陽性と判断される確率は $\frac{1}{100}$ である。よって、PCR 検査を受けて陽性だったとき、ウイルスに感染している確率は、

$$\frac{\frac{1}{100} \cdot \frac{70}{100}}{\frac{1}{100} \cdot \frac{70}{100} + \frac{99}{100} \cdot \frac{1}{100}} = \frac{70}{169} = 0.4142 \dots$$

であるから、41.4%である。同様に、PCR 検査を受けて陰性となる場合は、感染していない人が陰性と判断される場合と、感染している人が誤って陰性となる場合のいずれかである。よって、PCR 検査を受けて陰性だったとき、ウイルスに感染していない確率は、

$$\frac{\frac{99}{100} \cdot \frac{99}{100}}{\frac{1}{100} \cdot \frac{30}{100} + \frac{99}{100} \cdot \frac{99}{100}} = \frac{9801}{9831} = 0.9969 \dots$$

であるから、99.7%である。

(2) 1.

左から 6 番目の文字が A となる場合は、

- 3 回目までにちょうど 2 回表が出て、かつ 4 回目に表が出る
- 4 回目までにちょうど 1 回表が出て、かつ 5 回目に表が出る
- 5 回目までに 1 度も表が出ず、かつ 6 回目に表が出る

のいずれかである。また、1 回硬貨を投げたときに表および裏が出る確率は等しく $\frac{1}{2}$ である。よって、互いに排反であるから、左から 6 番目の文字が A となる確率は、

$$\begin{aligned} {}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + {}_4C_1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{2} &= \frac{3}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} \\ &= \frac{21}{64} \end{aligned}$$

である。また、左から 6 番目の文字が B となる事象は、左から 6 番目の文字が A となる事象の余事象であるから、その確率は、

$$1 - \frac{21}{64} = \frac{43}{64}$$

である。

2.

6 回硬貨を投げて文字列を作ったとき、 $0 \leq k \leq 6$ なる整数 k に対して、文字列に A が k 回含まれる確率は、 $\frac{{}_6C_k}{2^6}$ である。よって、文字列に含まれる A の個数の期待値は、

$$\sum_{k=0}^6 \left(k \cdot \frac{{}_6C_k}{2^6} \right) = \frac{6}{64} + \frac{30}{64} + \frac{60}{64} + \frac{60}{64} + \frac{30}{64} + \frac{6}{64} = 3$$

より、3 個である。また、表が出ても裏が出ても B は等しく 1 つ書き足されるから、6 回硬貨を投げて文字列を作ったときに文字列に含まれる B の個数は必ず 6 個である。よって、文字列に含まれる B の個数の期待値は 6 個である。

(3) 1.

部屋にいる生徒たちがどの日に生まれるかは同じ確率 $\frac{1}{365}$ であるから、部屋から 1 人の生徒を選んだときに A 君と同じ誕生日である確率は $\frac{1}{365}$ である。また、「部屋から 2 人の生徒を選んだときに、A 君と同じ誕生日である」という事象の余事象は、「部屋から 2 人の生徒を選んだときに、ともに A 君と異なる誕生日である」という事象となる。よって、部屋から 2 人の生徒を選んだときに、ともに A 君と異なる誕生日である確率は、 $\left(\frac{364}{365}\right)^2$ であるから、部屋から 2 人の生徒を選んだときに、A 君と同じ誕生日である確率は、 $1 - \left(\frac{364}{365}\right)^2$ である。

2.

「部屋から n 人の生徒を選んだときに、A 君と同じ誕生日である」という事象の余事象は、「部屋から n 人の生徒を選んだときに、すべての生徒が A 君と異なる誕生日である」という事象である。よって、部屋から n 人の生徒を選んだときに、A 君と同じ誕生日である確率は、 $1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$ である。この確率が 0.5 以上となる n の範囲は、

$$1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{364}{365}\right)^n \leq \frac{1}{2}$$

を満たす n の範囲である。ここで、両辺正より、底を 2 とする対数をとると、2 は 1 より大きいから、

$$\begin{aligned} \log_2 \left(\frac{364}{365}\right)^n &\leq \log_2 \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow n(\log_2 364 - \log_2 365) &\leq -1 \\ \therefore n &\geq \frac{1}{\log_2 365 - \log_2 364} \end{aligned}$$

が得られる。よって、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_2 365 - \log_2 364} &= \frac{1}{8.51175 - 8.50779} \\ &= \frac{1}{0.00396} \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} 0.00396 \cdot 252 &= 0.99792 < 1 < 1.00188 = 0.00396 \cdot 253 \\ \therefore 252 &< \frac{1}{0.00396} < 253 \end{aligned}$$

であるから、確率が 0.5 以上となる最小の n は、 $n = 253$ である。

IV

(1)

x_i および X_i の定義より, $X_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ である。よって, $1 \leq i \leq n$ なる自然数 i に対して, $x_i = X_i - X_{i-1}$ であるから,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (X_i + X_{i-1}) x_i &= \sum_{i=1}^n (X_i + X_{i-1}) (X_i - X_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i^2 - X_{i-1}^2) \\ &= X_n^2 - X_0^2 \\ &= 1 \quad (\because X_n = 1, X_0 = 0) \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \sum_{i=1}^n (X_i + X_{i-1}) x_i = 1$$

(2)

y_i および Y_i の定義より, $Y_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1$ である。よって, $1 \leq i \leq n$ なる自然数 i に対して, $y_i = Y_i - Y_{i-1}$ であるから,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n (X_i + X_{i-1}) y_i + \sum_{i=1}^n (Y_i + Y_{i-1}) x_i \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i + X_{i-1}) (Y_i - Y_{i-1}) + \sum_{i=1}^n (Y_i + Y_{i-1}) (X_i - X_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \{ (X_i Y_i + X_{i-1} Y_i - X_i Y_{i-1} - X_{i-1} Y_{i-1}) + (X_i Y_i + X_i Y_{i-1} - X_{i-1} Y_i - X_{i-1} Y_{i-1}) \} \\ &= 2 \sum_{i=1}^n (X_i Y_i - X_{i-1} Y_{i-1}) \\ &= 2 (X_n Y_n - X_0 Y_0) \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \sum_{i=1}^n (X_i + X_{i-1}) y_i + \sum_{i=1}^n (Y_i + Y_{i-1}) x_i = 2$$

(3)

②より, $2 \leq i \leq n$ なる自然数 i に対して $\frac{Y_{i-1}}{X_{i-1}} \leq \frac{Y_i}{X_i}$ であるから,

$$\begin{aligned} X_{i-1} Y_i &\geq X_i Y_{i-1} \\ \therefore X_{i-1} Y_i - X_i Y_{i-1} &\geq 0 \quad (\text{等号成立条件は, } \frac{Y_{i-1}}{X_{i-1}} = \frac{Y_i}{X_i}) \end{aligned}$$

が成り立つ。よって, $n \geq 2$ のとき, $i=2$ から $i=n$ まで足し合わせると,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n (X_{i-1} Y_i - X_i Y_{i-1}) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \sum_{i=1}^n (X_{i-1} Y_i - X_i Y_{i-1}) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \{ (X_i Y_i + X_{i-1} Y_i - X_i Y_{i-1} - X_{i-1} Y_{i-1}) - (X_i Y_i + X_i Y_{i-1} - X_{i-1} Y_i - X_{i-1} Y_{i-1}) \} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (X_i + X_{i-1}) (Y_i - Y_{i-1}) - \sum_{i=1}^n (Y_i + Y_{i-1}) (X_i - X_{i-1}) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (X_i + X_{i-1}) (Y_i - Y_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^n (Y_i + Y_{i-1}) (X_i - X_{i-1}) \\ &\therefore \sum_{i=1}^n (X_i + X_{i-1}) y_i \geq \sum_{i=1}^n (Y_i + Y_{i-1}) x_i \end{aligned}$$

となる。ただし, 等号成立条件は $2 \leq i \leq n$ なる自然数 i に対して $\frac{Y_{i-1}}{X_{i-1}} = \frac{Y_i}{X_i}$ である。また,

$n=1$ のとき,

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= (X_1 + X_0) y_1 = 1 \\ (\text{右辺}) &= (Y_1 + Y_0) x_1 = 1 \end{aligned}$$

であるから, $(\text{左辺}) \geq (\text{右辺})$ となり, 不等式および等号は成立する。以上より, 不等式は示された。

(証明終)

(4)

$\sum_{i=1}^n (X_i + X_{i-1}) y_i = 1$ ならば(2)より,

$$\sum_{i=1}^n (X_i + X_{i-1}) y_i = \sum_{i=1}^n (Y_i + Y_{i-1}) x_i = 1$$

が成り立つ。このとき(3)より, 等号成立条件は $2 \leq i \leq n$ なる自然数 i に対して $\frac{Y_{i-1}}{X_{i-1}} = \frac{Y_i}{X_i}$ である。

また, $X_1 = Y_1 = 1$ より, 等号成立条件が成り立つとき,

$$\frac{Y_1}{X_1} = \frac{Y_2}{X_2} = \cdots = \frac{Y_{n-1}}{X_{n-1}} = \frac{Y_n}{X_n} = 1$$

となり, $2 \leq i \leq n$ なる自然数 i に対しても同様に $X_i = Y_i$ が成り立つ。ここで,

$$\begin{aligned} X_i &= Y_i, \quad X_{i-1} = Y_{i-1} \\ \therefore X_i - X_{i-1} &= Y_i - Y_{i-1} \\ \Leftrightarrow x_i &= y_i \end{aligned}$$

であることが分かり, これと $X_1 = Y_1$ より $x_1 = y_1$ であることを合わせて, $\sum_{i=1}^n (X_i + X_{i-1}) y_i = 1$ ならば $1 \leq i \leq n$ なるすべての i について $x_i = y_i$ であることが示された。

(証明終)