

数 学

注 意

1. 問題は全部で8ページである.
2. 解答用紙に氏名・受験番号を忘れずに記入すること. (ただし, マーク・シートにはあらかじめ受験番号がプリントされている.)
3. 解答はすべて解答用紙に記入すること.
4. 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが, どのページも切り離してはいけない.
5. 解答用紙(その1はマーク・シート, その2は記述式)は両方とも必ず提出のこと. この問題冊子は提出する必要はない.

マーク・シート記入上の注意については, この問題冊子の裏表紙に記載されているので試験開始までに確認すること. ただし, 冊子は開かないこと.

I 以下の問題については 解答用紙(その1)を使用すること。

(1) 10 から 50 までの自然数のうち、次のような数の和を求めよ。

1. 4 の倍数の和は $\boxed{123}$ である。
2. 4 で割って 2 余る数の和は $\boxed{456}$ である。
3. 4 で割り切れない数の和は $\boxed{789}$ である。

(2) 1 から n までの自然数が 1 つずつかかれた n 枚のカードがある。この中から 1 枚のカードを抜いて、合計すると 25 であった。 n は $\boxed{10}$ であり、抜いたカードにかかれた数字は $\boxed{11}$ である。

(3) 3374850 の正の約数の個数は $\boxed{1213}$ であり、100 未満の正の約数の総和は $\boxed{141516}$ である。

(4) a を正の定数とする。 $a^{2x} = 11$ のとき、 $\frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^x - a^{-x}}$ の値は $\frac{\boxed{171819}}{\boxed{2021}}$ である。

(5) 不等式 $(\log_2 2x) \left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{4}{x} \right) \leq 4$ を解くと、 $\frac{\boxed{22}}{\boxed{23}} \leq x \leq \boxed{24}$ である。

(6) 半径 1 の円に内接する三角形について、次の問いに答えよ。

1. 1 つの角の大きさが 120° のとき、3 辺の長さの和の最大値は $\boxed{25} + \sqrt{\boxed{26}}$ である。
2. 3 辺の長さの和の最大値は $\boxed{27}\sqrt{\boxed{28}}$ である。

(計算余白)

Ⅱ 以下の問題については 解答用紙(その1)を使用すること.

(1) $-\frac{11}{2}\pi \leq x \leq \frac{15}{2}\pi$ とする.

1. 関数 $y = \cos \frac{x}{2}$ のグラフと関数 $y = \cos \frac{3}{2}x$ のグラフの共有点は $\boxed{29}\boxed{30}$ 個である.

2. 関数 $y = \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3}{2}x$ の最大値は $\frac{\boxed{31}\sqrt{\boxed{32}}}{\boxed{33}}$ であり, 最小値は $-\frac{\boxed{34}\sqrt{\boxed{35}}}{\boxed{36}}$ である.

(2) 次の問いに答えよ.

1. 4^{10} を 3 で割った余りは $\boxed{37}$ である.

2. 8^{10} を 7 で割った余りは $\boxed{38}$ である.

3. 数列 x_n を次のように定める.

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 2^{x_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

x_{2021} を 3 で割った余りは $\boxed{39}$ である. また x_{2022} を 7 で割った余りは $\boxed{40}$ である.

(3) x, y が不等式 $x \geq 1, y \geq 1, 3x + 2y \leq 12, ax + y \leq 4$ ($0 \leq a \leq 0.9$) を同時に満たすとし, これらの連立不等式の表す領域を S とする.

1. S の面積の最大値は $\boxed{41}$ であり, 最小値は $\frac{\boxed{42}\boxed{43}}{\boxed{44}\boxed{45}}$ である.

2. S の面積が最大値をとるとき, $\sqrt{6}x + \sqrt{3}y$ の最大値は $\frac{\boxed{46}\boxed{47}\sqrt{\boxed{48}} + \boxed{49}\sqrt{\boxed{50}}}{\boxed{51}}$ であり, 最小値は $\sqrt{3} + \sqrt{\boxed{52}}$ である.

3. c, d を正の定数とする. S の面積が最小値をとるとき, $cx - dy$ は $x = \frac{\boxed{53}\boxed{54}}{\boxed{55}}, y = \boxed{56}$ で最大値をとり $x = \boxed{57}, y = \frac{\boxed{58}\boxed{59}}{\boxed{60}\boxed{61}}$ で最小値をとる.

(計算余白)

III 以下の問題については 解答用紙(その1)を使用すること。

(1) あるウイルスのPCR検査の感度は70%, 特異度は99%である。ここで感度とは感染している人を陽性と判断する確率, 特異度とは感染していない人を陰性と判断する確率のことである。ある地域でこのウイルスに感染している人の割合は100人に1人だとする。住民の1人がPCR検査を受けて陽性だったとき, この人がウイルスに感染している確率は $\frac{62}{63} \cdot \frac{64}{65}$ %であり, 陰性だったときウイルスに感染していない確率は $\frac{65}{66} \cdot \frac{67}{68}$ %である。ただし, 小数第2位を四捨五入して, 小数第1位まで求めよ。

(2) 1枚の硬貨を投げ, 表が出たときは文字列ABをかき, 裏が出たときは文字Bをかく。さらに繰り返し硬貨を投げ, 同じ規則に従って, AB, Bをすでにかかれてある文字列の右側につなげてかいていく。

- 6回硬貨を投げ, 文字列を作るとき, 文字列の左から6番目の文字がAとなる確率は $\frac{68}{70} \cdot \frac{69}{71}$, Bとなる確率は $\frac{72}{74} \cdot \frac{73}{75}$ である。
- 6回硬貨を投げ, 文字列を作るとき, 文字列に含まれるAの個数の期待値は $\frac{76}{77}$, Bの個数の期待値は $\frac{77}{78}$ である。

(3) n 人の生徒がいる部屋を考える。部屋にいる生徒たちが生まれた年はうるう年ではなく, 部屋にいる生徒たちのそれぞれがどの日に生まれるかは同じ確率 $\frac{1}{365}$ であるとする。また, n 人のそれぞれについて, どの日に生まれるかは他の人がいつ生まれたのかといったことと独立であるとする。いま, A君をこの部屋にいない生徒とし, A君が生まれた年はうるう年ではないとする。このとき, 以下の問いに答えよ。

- この部屋から1人の生徒を選んだとき, A君と同じ誕生日である確率は $\frac{78}{79} \cdot \frac{80}{81}$ であり, この部屋から2人の生徒を選んだとき, A君と同じ誕生日である確率は $1 - \left(\frac{82}{85} \cdot \frac{83}{86} \cdot \frac{84}{87} \right)^2$ である。
- $\log_2 364 = 8.50779$, $\log_2 365 = 8.51175$ とする。 n 人の生徒がいる部屋に, A君と同じ誕生日の生徒がいる確率が0.5以上となる最小の人数 n は $\frac{88}{89} \cdot \frac{90}{91}$ である。

(計算余白)

Ⅳ 以下の問題については 解答用紙(その2)を使用すること。

全部の和が1となるような n 個の正の数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の x_1 から x_i までの和を X_i で表す。また $X_0 = 0$ とする。同様に全部の和が1となるような n 個の正の数 $y_1, y_2, \dots, y_n$ の y_1 から y_i までの和を Y_i で表す。また $Y_0 = 0$ とする。さらに

$$\frac{y_1}{x_1} \leq \frac{y_2}{x_2} \leq \dots \leq \frac{y_n}{x_n} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

が成立しているとする。このとき次の問いに答えよ。ただし

$$\frac{Y_1}{X_1} \leq \frac{Y_2}{X_2} \leq \dots \leq \frac{Y_n}{X_n} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

であることは使ってもよい。

- (1) $\sum_{i=1}^n (X_i + X_{i-1})x_i$ を求めよ。
- (2) $\sum_{i=1}^n (X_i + X_{i-1})y_i + \sum_{i=1}^n (Y_i + Y_{i-1})x_i$ を求めよ。
- (3) $\sum_{i=1}^n (X_i + X_{i-1})y_i \geq \sum_{i=1}^n (Y_i + Y_{i-1})x_i$ を証明せよ。
- (4) $\sum_{i=1}^n (X_i + X_{i-1})y_i = 1$ ならば、すべての i について $x_i = y_i$ である。これを証明せよ。

(計算余白)

マーク・シート記入上の注意

- (1) 問題の文中の $\boxed{1}$, $\boxed{2\ 3}$ などには, 特に指示がないかぎり, 符号(−), 数字(0~9), 文字(a, b, c, d), または記号(*)が入る. 1, 2, 3, … の一つ一つは, これらのいずれか一つに対応する. それらを解答用紙の1, 2, 3, … で示された解答欄にマークして答えよ.

例 $\boxed{11\ 12\ 13}$ に −83 と答えたいとき

11	☒	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	*
12	−	0	1	2	3	4	5	6	7	☒	9	a	b	c	d	*
13	−	0	1	2	☒	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	*

- (2) 解答欄が余るときは, 余った欄(後の方を余らせる)に*をマークする.

例 $\boxed{14\ 15}$ に 4 と答えたいとき

14	−	0	1	2	3	☒	5	6	7	8	9	a	b	c	d	*
15	−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	☒

- (3) 解答欄が不足するときは, 最後の欄に*をマークする.

例 $\boxed{16\ 17}$ に 345 と答えたいとき

16	−	0	1	2	☒	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	*
17	−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	☒

- (4) 解答欄に適合するものがないときは, その欄に*をマークする.

例 $\boxed{18\ 19}$ に対して問題が

$$x^2 + 1 < 0 \text{ ならば } x \geq \boxed{18\ 19}$$

のとき

18	−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	☒
19	−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	☒

- (5) 分数形で解答するときは, 既約分数として符号は分子につける.
- (6) 根号あるいは対数を含む形で解答するときは, 根号の中や真数に現れる自然数が最小になる形で答える. [例] $\sqrt{8}$ は $2\sqrt{2}$, $3\log_2 9$ は $6\log_2 3$ とする.
- (7) 分数形で根号を含む形で解答するときは, $\frac{6+4\sqrt{2}}{4}$ ではなく, $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ のように約分する.