

【解答】

(1)	1		
	7		
(2)	2	3	
	2	8	
(3)	4	5	6
	7	2	9
(4)	7	8	9
	5	4	0

【解説】

(1)

3つの箱に入れる玉の個数の組み合わせを列挙すると、

$(6, 0, 0), (5, 1, 0), (4, 2, 0), (4, 1, 1), (3, 2, 1), (3, 3, 0), (2, 2, 2)$ の組み合わせが考えられる。したがって入れ方は7通りである。

(2)

それぞれの箱について玉の個数の組み合わせを数える。求める場合の数は玉を6個、仕切りを2個として、これを一行に並べるときの場合の数に等しい。したがって、

$${}_8C_2 = 28 \text{ (通り)}$$

である。

(3)

それぞれの玉に対してどの箱に入るかが3通りあるから、

$$3^6 = 729 \text{ (通り)}$$

である。

(4)

(3)の組み合わせのうち、玉が1つも入っていない箱が存在する場合を除く。

[1] 1つの箱にすべての玉がある場合

箱の数に等しく、3通りである。

[2] 2つの箱にすべての玉がある場合

どの2つの箱に入れるかが ${}_3C_2 = 3$ (通り) である。このときの玉の入れ方は、 $2^6 = 64$ (通り) からすべての玉が1つの箱に入る場合の2通りを除いたものである。したがって、

$$3 \cdot (2^6 - 2) = 186 \text{ (通り)}$$

である。

以上、[1], [2]より、求める場合の数は、

$$729 - 3 - 186 = 540 \text{ (通り)}$$

である。

II

【解答】

(1)	10	11	
	5	1	
(2)	12	13	14
	3	2	3
(3)	15	16	
	7	6	

【解説】

(1)

以下では対数の底を10とする。 4^{25} は10進法で桁数が a 、 5^{50} は10進法で桁数が b であるから、

$$\begin{cases} 10^{a-1} \leq 4^{25} < 10^a \\ 10^{b-1} \leq 5^{50} < 10^b \end{cases}$$

を満たす。第1式の両辺について常用対数をとると、

$$\begin{aligned} a-1 &\leq 25 \log 4 < a \\ \Leftrightarrow 25 \cdot 2 \log 2 < a &\leq 25 \cdot 2 \log 2 + 1 \\ \Leftrightarrow 15.05 < a &\leq 16.05 \end{aligned}$$

となる。 a, b は自然数であるから、 $a=16$ である。第2式についても、

$$\begin{aligned} b-1 &\leq 50 \log 5 < b \\ \Leftrightarrow 50(1-\log 2) < b &\leq 50(1-\log 2)+1 \\ \Leftrightarrow 34.95 < b &\leq 35.95 \end{aligned}$$

となる。同様に b は $b=35$ である。したがって、

$$a+b=51$$

である。

(2)

桁数を正の整数 n として(1)と同様に式で表すと、

$$\cancel{6^{100}} \leq \cancel{2^{100}} < \cancel{9^{100}}$$

である。両辺について常用対数をとると、

$$\begin{aligned} (n-1) \log 9 &\leq 100 \log 2 < n \log 9 \\ \Leftrightarrow \frac{100 \log 2}{2 \log 3} < n &\leq \frac{100 \log 2}{2 \log 3} + 1 \\ \Leftrightarrow 31.54\dots < n &\leq 32.54\dots \end{aligned}$$

となるから、 $n=32$ である。また、最高位の数字を1以上8以下の正の整数 c とおくと、

$$c \cdot 9^{31} \leq 2^{100} < (c+1) \cdot 9^{31}$$

であるから、同様に常用対数をとると、

$$\begin{aligned} \log c + 31 \log 9 &\leq 100 \log 2 < \log(c+1) + 31 \log 9 \\ \Leftrightarrow \log c &\leq 100 \log 2 - 31 \log 9 < \log(c+1) \\ \Leftrightarrow \log c &\leq 0.5198 < \log(c+1) \end{aligned}$$

となる。常用対数は単調増加であることと $\log 3 = 0.4771$ 、 $\log 4 = 0.6020$ であることから、これを満たす c は $c=3$ である。

(3)

10^5 を n 及び $(n+1)$ 進法で表したときの桁数を正の整数 d とおく。これを式で表すと、

$$\begin{cases} n^{d-1} \leq 10^5 < n^d \\ (n+1)^{d-1} \leq 10^5 < (n+1)^d \end{cases}$$

であるが、この式の両辺で常用対数をとって同様に整理すると、

$$\begin{cases} \frac{5}{\log n} < d \leq \frac{5}{\log n} + 1 \\ \frac{5}{\log(n+1)} < d \leq \frac{5}{\log(n+1)} + 1 \end{cases}$$

となる。 d が正の整数であるから、上式より $\frac{5}{\log n}$ と $\frac{5}{\log(n+1)}$ の整数部分が等しくなるよう

な n を求めればよい。2以上の整数 n について $\frac{5}{\log n}$ を n が小さい順に計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{5}{\log 2} &= 16.61\dots, \frac{5}{\log 3} = 10.47\dots, \frac{5}{\log 4} = 8.30\dots, \frac{5}{\log 5} = 7.15\dots \\ \frac{5}{\log 6} &= 6.42\dots, \frac{5}{\log 7} = 5.91\dots, \frac{5}{\log 8} = 5.53\dots \end{aligned}$$

であるから、 $n=7$ が上の式を満たす最小のものである。このときの桁数は $d=6$ である。

III

【解答】

(1)	17	18	19	20	21
	0	-	2	-	2
(2)	22	23	24		
	2	0	0		
(3)	25	26	27	28	29
	3	1	1	2	2

【解説】

(1)

点Pの座標は直線 ℓ 上にあるから、実数 s を用いて $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} = (4+s, 2+s, 2+s)$ と表せる。点Pが yz 平面上にあるとき、点Pの x 座標が0であるから、 $4+s=0 \Leftrightarrow s=-4$ となる。したがって、 $\overrightarrow{OP} = (0, -2, -2)$ である。

(2)

(1)よりベクトル $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{CD}$ を計算すると、

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC} = (2+s, 1+s, 1+s)$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = (1, 1, 0)$$

である。

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CD} = (2+s, 1+s, 1+s) \cdot (1, 1, 0) = 3+2s$$

であるから、 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{CP}| |\overrightarrow{CD}| \cos 120^\circ$ よりこの式に代入して、

$$3+2s = \sqrt{(2+s)^2 + 2(1+s)^2} \cdot \sqrt{1+1} \cos 120^\circ$$

$$\Leftrightarrow 3+2s = \sqrt{3s^2 + 8s + 6} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

である。ここでこの式は右辺が0未満であるから、左辺も0未満であることが必要であり、し

たがって $s < -\frac{3}{2}$ である。上の式について両辺を2乗すると、

$$2(3+2s)^2 = 3s^2 + 8s + 6$$

$$\Leftrightarrow 5s^2 + 16s + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (5s+6)(s+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow s = -2, -\frac{6}{5}$$

であるから、 $s < -\frac{3}{2}$ より解は $s = -2$ である。このときの点Pの座標は $(2, 0, 0)$ である。

(3)

(1)と同様にして、直線 ℓ' 上の点Qの座標は実数 t を用いて、

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{CD} = (2+t, 1+t, 1)$$

のように表せるから、 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (t-s-2, t-s-1, -s-1)$ である。直線PQが直線 ℓ と直

線 ℓ' の両方に直交するとき、直線PQの方向ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ が直線 ℓ の方向ベクトル $\overrightarrow{AB}$ や直線 ℓ' の方向ベクトル $\overrightarrow{CD}$ の両方に直交するから、

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t-3s-4=0 \\ 2t-2s-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = -1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

となる。したがって点Pの座標は $(3, 1, 1)$ である。また、 $\overrightarrow{PQ} = (t-s-2, t-s-1, -s-1)$ は、

$\overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$ であるから、 $PQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ である。

IV

【解答】

(1)	30	31						
	3	4						
(2)	32	33	34	35	36	37	38	
	2	5	0	2	7	7	3	

【解説】

(1)

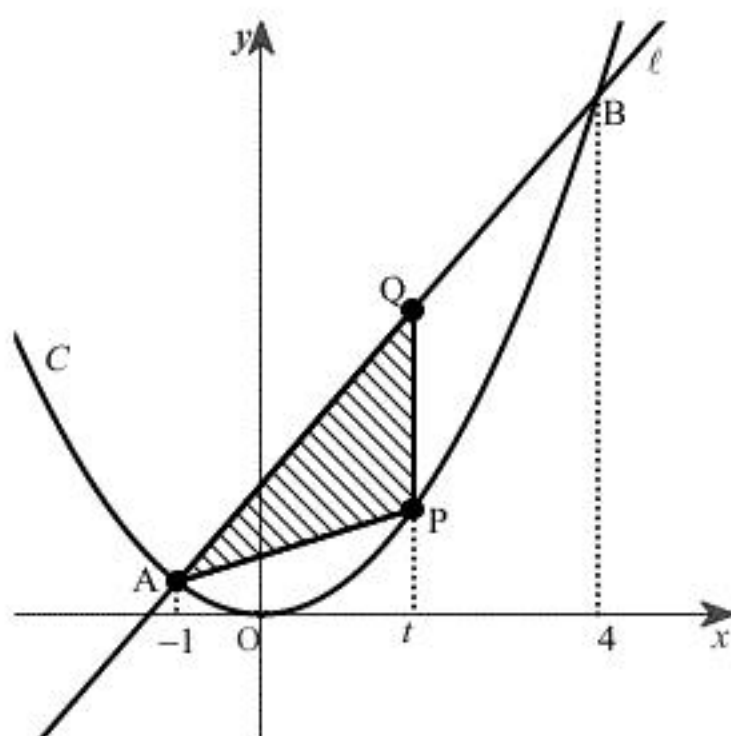
直線 AB は点 A(-1, 1), B(4, 16) を通るから、直線 AB の式は、

$$y = \frac{15}{5} \{x - (-1)\} + 1 \Leftrightarrow y = 3x + 4$$

である。

(2)

$\triangle APQ$ の面積は下図斜線部の面積となる。



点 P の座標は (t, t^2) 、点 Q の座標は $(t, 3t+4)$ であるから、 $\triangle APQ$ の面積を $S(t)$ とすると、

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} \cdot (3t+4-t^2) \cdot \{t-(-1)\} \\ &= -\frac{1}{2} (t^2-3t-4)(t+1) \\ &= -\frac{1}{2} (t^3-2t^2-7t-4) \end{aligned}$$

である。 $S(t)$ を t で微分すると、

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\frac{1}{2} (3t^2-4t-7) \\ &= -\frac{1}{2} (3t-7)(t+1) \end{aligned}$$

であるから、 $-1 < t < 4$ の範囲で増減表を書くと、

t	(-1)	...	$\frac{7}{3}$	...	(4)
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$	(0)	↗	$\frac{250}{27}$	↘	(0)

となる。したがって、 $\triangle APQ$ の面積は $t = \frac{7}{3}$ のとき最大値 $\frac{250}{27}$ をとる。