

【解答】

ア	イ	ウ
$\frac{64}{243}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{200}{729}$

【解説】

(1)

5試合目でAが優勝を決めるのは、4試合目までにAが3回、Bが1回勝っていて、5試合目にAが勝つときである。4試合目までのA、Bの勝敗のつき方は ${}_4C_3$ 通りあるから、4試合目までにAが3回、Bが1回勝つ確率は

$${}_4C_3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{32}{81}$$

である。よって、5試合目でAが優勝を決める確率は

$$\frac{32}{81} \cdot \frac{2}{3} = \frac{64}{243}$$

である。

(2)

5試合目で優勝チームが決まる確率は、5試合目でAが優勝を決める確率と5試合目でBが優勝を決める確率の和であるから、5試合目でBが優勝を決める確率を考える。5試合目でBが優勝を決めるのは、4試合目までにAが1回、Bが3回勝っていて、5試合目にBが勝つときである。ゆえに5試合目でBが優勝を決める確率は

$${}_4C_3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{243}$$

である。よって5試合目で優勝チームが決まる確率は

$$\frac{64}{243} + \frac{8}{243} = \frac{8}{27}$$

である。

(3)

6試合目で優勝チームが決まるのは、6試合目でAが優勝を決めるときか、6試合目でBが優勝を決めるときにいずれかに限られる。6試合目でAが優勝を決めるのは、5試合目までにAが3回、Bが2回勝っていて、6試合目にAが勝つときである。よって6試合目でAが優勝を決める確率は

$${}_5C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{160}{729}$$

である。同様に考えると、6試合目でBが優勝を決める確率は

$${}_5C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{40}{729}$$

である。ゆえに6試合目で優勝チームが決まる確率は

$$\frac{160}{729} + \frac{40}{729} = \frac{200}{729}$$

である。

【解答】

エ	オ	カ	キ
-2	0	-12	-6

【解説】

(1)

$$x^2 + x + a \leq 2x \leq x^2 + 3x - 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + a \leq 2x \\ x^2 + 3x - 2 \geq 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + a \leq 0 \\ x \leq -2, 1 \leq x \end{cases}$$

である。ここで、 $f(x) = x^2 - x + a$ とおくと $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + a - \frac{1}{4}$ であるから、 $y = f(x)$ のグ

ラフの軸は $x = \frac{1}{2}$ である。よって

$$\begin{cases} f(0) < f(-1) < f(-2) < f(-3) < \cdots \\ f(1) < f(2) < f(3) < \cdots \\ f(-k) = f(1+k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

が成立する。特に、 $x \leq -2, 1 \leq x$ であるような整数 x に対する $f(x)$ の大小関係は

$$f(1) < f(2) < f(3) = f(-2) < f(4) = f(-3) < \cdots$$

となる。したがって、不等式(*)を満たす整数 x がちょうど1個であるための条件は、その整数 x が $x = 1$ であることから

$$f(1) \leq 0 \text{ かつ } f(2) > 0$$

である。よって

$$\begin{aligned} & \begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f(2) > 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0 \\ 2 + a > 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow -2 < a \leq 0 \end{aligned}$$

となる。

(2)

(1)より、不等式(*)を満たす整数 x がちょうど4個であるための条件は、その整数 x が $x = 1, 2, 3, -2$ であることから

$$f(3) \leq 0 \text{ かつ } f(4) > 0$$

である。よって

$$\begin{aligned} & \begin{cases} f(3) \leq 0 \\ f(4) > 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 6 + a \leq 0 \\ 12 + a > 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow -12 < a \leq -6 \end{aligned}$$

となる。

【解答】

ク	ケ	コ	サ
7	$\frac{10}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}$

【解説】

(1)

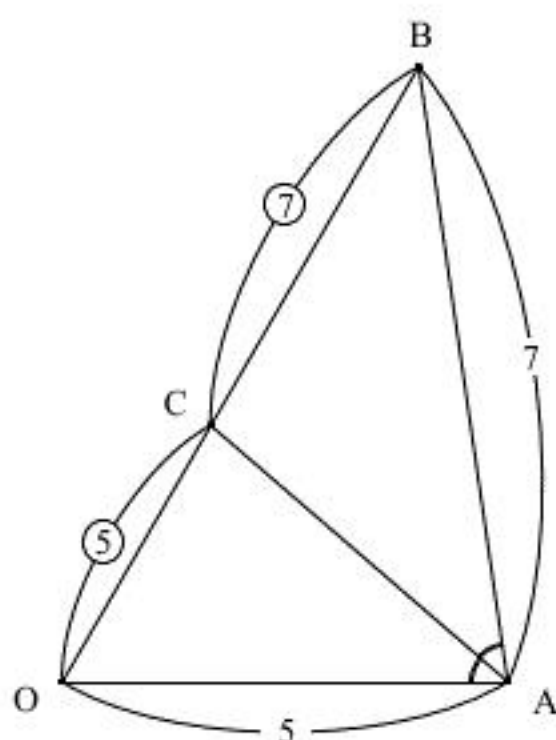
△OAB に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}
 AB^2 &= OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB \\
 &= 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \\
 &= 49
 \end{aligned}$$

となるから、辺 AB の長さは 7 である。

(2)

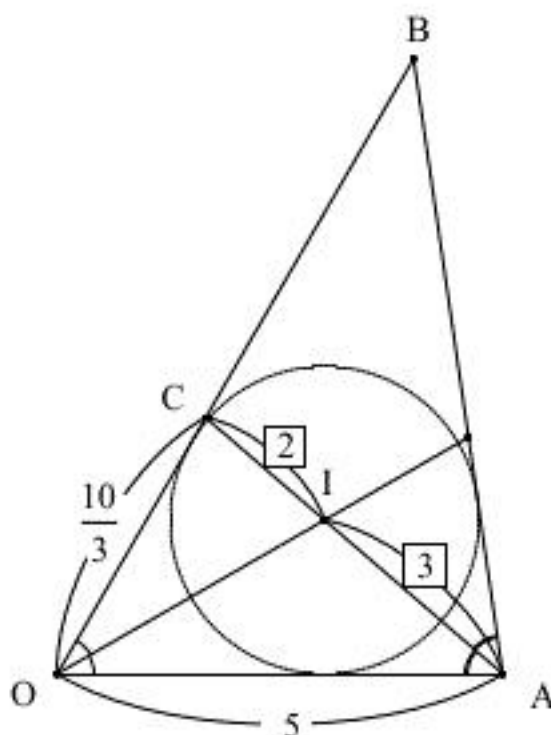
△OAB と点 C は次図のようになる。

角の二等分線の性質より $AO:AB = OC:BC$ が成り立つから、 $OC:BC = 5:7$ である。よって

$$OC = \frac{5}{12} OB = \frac{10}{3}$$

である。

(3)

前図のように、 $\angle A$ の二等分線と $\angle O$ の二等分線の交点が I である。角の二等分線の性質より $OA:OC = IA:IC$ が成り立つから、 $IA:IC = 5:\frac{10}{3} = 3:2$ である。よって

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OI} &= \frac{2}{5} \overrightarrow{OA} + \frac{3}{5} \overrightarrow{OC} \\
 &= \frac{2}{5} \overrightarrow{OA} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{12} \overrightarrow{OB} \\
 &= \frac{2}{5} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4} \overrightarrow{OB}
 \end{aligned}$$

となる。

(1)

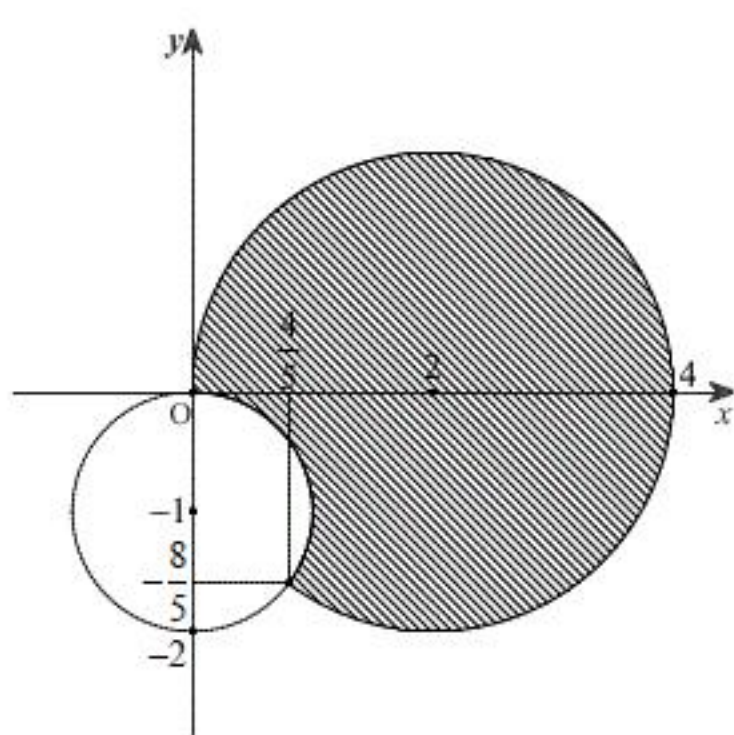
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x \leq 0 \\ x^2 + y^2 + 2y \geq 0 \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \\ x^2 + (y+1)^2 \geq 1 \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①は中心が点 $(2, 0)$ 、半径が2の円の内部、②は中心が点 $(0, -1)$ 、半径が1の円の外部をそれぞれ表している。ここで、2つの円 $x^2 + y^2 - 4x = 0$ 、 $x^2 + y^2 + 2y = 0$ の共有点の座標を求める。2式の辺々の差をとると $4x + 2y = 0 \Leftrightarrow y = -2x$ となるから、 $x^2 + y^2 - 4x = 0$ に代入すると

$$\begin{aligned} x^2 + 4x^2 - 4x &= 0 \\ \Leftrightarrow x \left(x - \frac{4}{5} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, \frac{4}{5} \end{aligned}$$

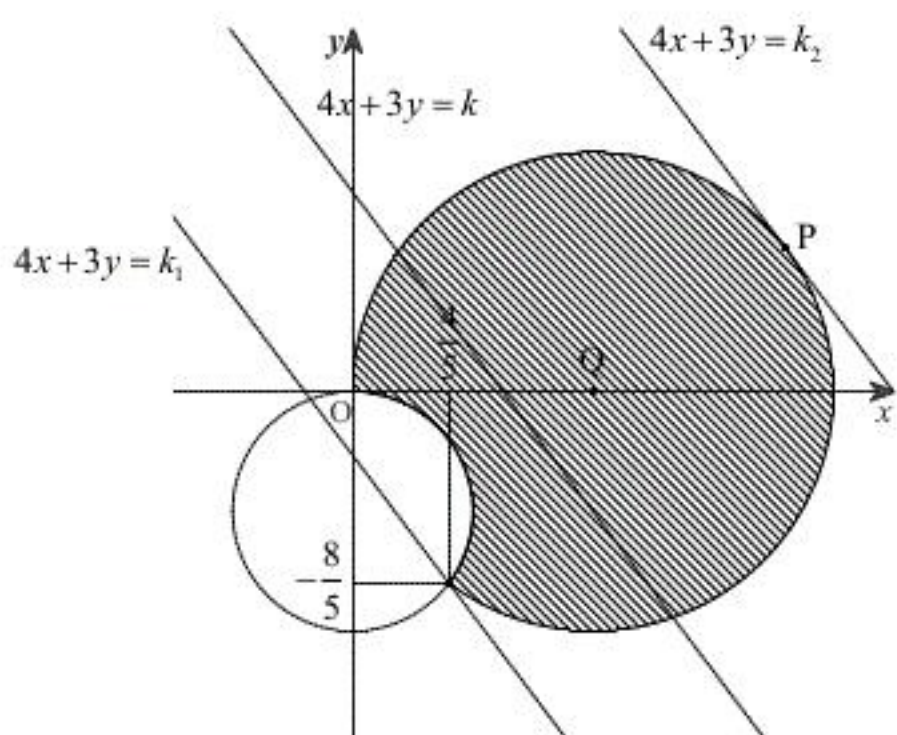
となる。よって2つの円の共有点は $(0, 0)$ 、 $\left(\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ である。以上より、①と②の連立不等式の表す領域は次図の斜線部である。ただし、境界を含む。



(答) 前図

(2)

直線 $4x + 3y = k$ が、点 $\left(\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ を通るとき、 k を k_1 、 $y \geq 0$ で円 $x^2 + y^2 - 4x = 0$ と点Pで接するときの k を k_2 とする。直線 $4x + 3y = k_1$ の傾き $-\frac{4}{3}$ は、Oと点 $\left(\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ を通る直線の傾き -2 より大きいことに注意すると、これらの直線は次図のようになる。



$4x + 3y = k$ と(1)の領域が共有点をもつとき、 k は k_1 から k_2 の間を連続的に変化するから、求める k の値の範囲は $k_1 \leq k \leq k_2$ である。 $4x + 3y = k_1$ は点 $\left(\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ を通るから

$$k_1 = 4 \cdot \frac{4}{5} + 3 \cdot \left(-\frac{8}{5}\right) = -\frac{8}{5}$$

である。また、 $(4, 3)$ は $4x + 3y = k_2$ の法線ベクトルであるから、 $Q(2, 0)$ として点Qを定めると $\overrightarrow{QP} = \frac{2}{5}(4, 3) = \left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$ である。よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} \\ &= (2, 0) + \left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right) \\ &= \left(\frac{18}{5}, \frac{6}{5}\right) \end{aligned}$$

より $P\left(\frac{18}{5}, \frac{6}{5}\right)$ となり、 $4x + 3y = k_2$ は点Pを通るから

$$k_2 = 4 \cdot \frac{18}{5} + 3 \cdot \frac{6}{5} = 18$$

である。したがって求める k の範囲は $-\frac{8}{5} \leq k \leq 18$ である。

(答) $-\frac{8}{5} \leq k \leq 18$

(1)

$$\begin{aligned}
 \log_2 |x| + \log_4 |x-2| &= \log_4 a \\
 \Leftrightarrow \frac{\log_4 |x|}{\log_4 2} + \log_4 |x-2| &= \log_4 a \\
 \Leftrightarrow \log_4 x^2 |x-2| &= \log_4 a \\
 \Leftrightarrow x^2 |x-2| &= a \quad (\because a > 0)
 \end{aligned}$$

である。ここで、 $f(x) = x^2 |x-2|$ とすると

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x^2 & (x \geq 2) \\ -x^3 + 2x^2 & (x < 2) \end{cases}$$

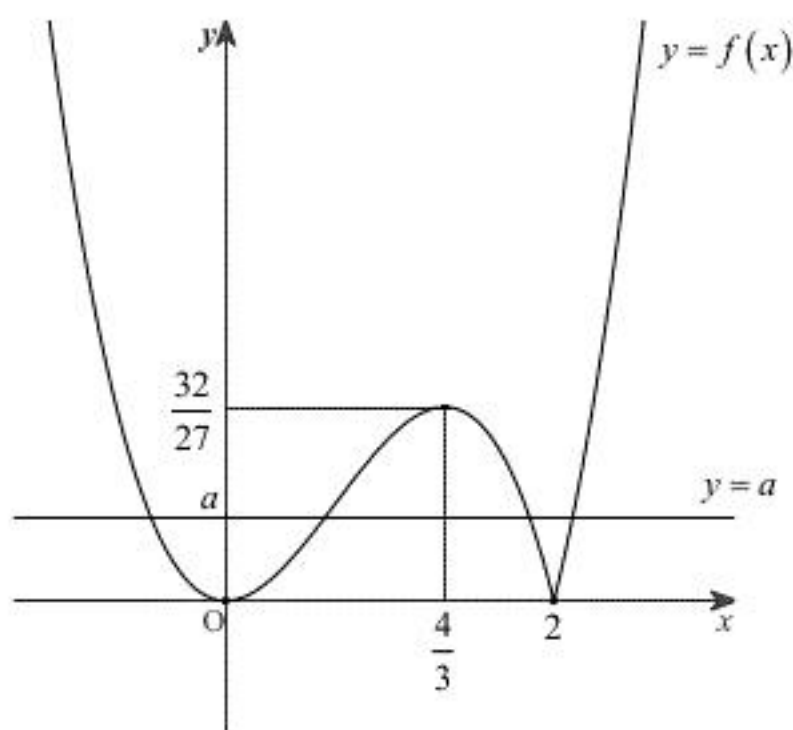
である。よって

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \begin{cases} 3x^2 - 4x & (x > 2) \\ -3x^2 + 4x & (x < 2) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 3x \left(x - \frac{4}{3} \right) & (x > 2) \\ -3x \left(x - \frac{4}{3} \right) & (x < 2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

となり、 $f(x)$ の増減表は次表のようになる。

x	...	0	...	$\frac{4}{3}$	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-		+
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

したがって、 $y = f(x)$ と $y = a$ のグラフは次図のようになる。



方程式(*)の実数解の個数と、2つのグラフ $y = f(x)$, $y = a$ の共有点の個数は等しい。よって

前図より、求める a の値の範囲は $0 < a < \frac{32}{27}$ である。

(答) $0 < a < \frac{32}{27}$

(2)

(1)の図より、方程式(*)がちょうど3個の実数解をもつのは $a = \frac{32}{27}$ のときのみである。この

とき、 $f(x) = \frac{32}{27}$ の負の実数解を求めるから、 $x < 2$ より $f(x) = -x^3 + 2x^2$ としてよい。

$f(x) = \frac{32}{27}$ は $x = \frac{4}{3}$ を重解にもつことを用いて因数分解すると

$$\begin{aligned}
 -x^3 + 2x^2 &= \frac{32}{27} \\
 \Leftrightarrow 27x^3 - 54x^2 + 32 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (3x-4)^2 (3x+2) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \quad (\because x < 0)
 \end{aligned}$$

となる。よって負の実数解は $x = -\frac{2}{3}$ である。

(答) $x = -\frac{2}{3}$