

〔解答〕

(1)	ア	イ
	$\frac{2}{9}$	$\frac{8}{27}$
(2)	ウ	
	$\frac{2(n-1)}{3^n}$	
(3)	エ	
	$\frac{2(n-1)^2}{3^n}$	
(4)	オ	
	$3n^2-3n+3$	
(5)	カ	
	$1-\frac{n^2+n+1}{3^n}$	

〔解説〕

- (1) ちょうど2回で勝者が決まるとき、勝者は2回ともじゃんけんで勝つ。1回のじゃんけんである人が勝つ確率、負ける確率、あいこになる確率はいずれも $\frac{1}{3}$ であることを踏まえると、特定の人が2回連続で勝つ確率は $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ であるから、勝者が2人のうちどちらであるかを考慮して、

$$p_2=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$$

である。ちょうど3回で勝者が決まるとき、勝者は1,2回目のうち1回勝ち、1回はあいこまたは負け、3回目で勝つ。勝者が2人のうちどちらであるか、および1回目と2回目のどちらで勝つかを考慮して、

$$p_3=2\cdot2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{27}$$

である。

- (2) $n=1$ のとき勝者は決定しないから、 $n\geq 2$ の場合を考える。求める確率は勝者が1回目から $n-1$ 回目までに1回勝って $n-2$ 回あいこであり、かつ n 回目に勝つ確率であるから、勝者が2人のうちどちらであるか、および1回目から $n-1$ 回目までのどこで勝つかを考慮すると、求める確率は

$$2\cdot {}_{n-1}C_1\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2(n-1)}{3^n}$$

である。また、この式に $n=1$ を代入すると $\frac{2(0-0)}{3^0}=0$ となるから、これは任意の自然数 n について成り立つ。

- (3) ちょうど n 回目に2勝1敗で勝負が決まる確率を考える。2勝1敗で勝負が決まるには最低でも3回じゃんけんを行う必要があるから $n=1,2$ の場合このような事象は起こり得ない。よって $n\geq 3$ の場合を考えると、考える確率は勝者が1回目から $n-1$ 回目までに1回勝って1回負けて $n-3$ 回あいこであり、 n 回目に勝つ確率であるから、勝者が2人のうちどちらであるか、および1回目から $n-1$ 回目までのどこで勝つか、および1回目から $n-1$ 回目までのどこで負けるかを考慮して、

$$2\cdot {}_{n-1}C_1\cdot {}_{n-2}C_1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2(n-1)(n-2)}{3^n}$$

である。また、この式に $n=1,2$ を代入するとそれぞれ $\frac{2(1-1)(1-2)}{3^1}=0, \frac{2(2-1)(2-2)}{3^2}=0$ となるから、これは任意の自然数 n について成り立つ。

勝者が決まるとき勝者は2勝0敗または2勝1敗であるから、(2)で求めた確率と合わせると、

$$p_n=\frac{2(n-1)}{3^n}+\frac{2(n-1)(n-2)}{3^n}=\frac{2(n-1)^2}{3^n}$$

である。

- (4)

$$\frac{f(n)}{3^n}-\frac{f(n+1)}{3^{n+1}}=p_n$$

$$\Leftrightarrow 3f(n)-f(n+1)=6(n-1)^2\cdots\cdots\textcircled{1}$$

である。ここで、 $f(n)$ は2次関数だから

$$f(n)=an^2+bn+c$$

とおける。ただし $a\neq 0$ である。このとき、 $\textcircled{1}$ は

$$\begin{aligned} 3an^2+3bn+3c-a(n+1)^2-b(n+1)-c &= 6(n-1)^2 \\ \Leftrightarrow 2an^2+(2b-2a)n+(2c-a-b) &= 6n^2-12n+6 \end{aligned}$$

と変形できる。これが n の恒等式であるから、係数比較して

$$\begin{cases} 2a=6 \\ 2b-2a=-12 \\ 2c-a-b=6 \end{cases}$$

が成り立つ。この連立方程式を解くと $a=3, b=-3, c=3$ であり、これは $a\neq 0$ を満たす。よって、

$$f(n)=3n^2-3n+3$$

である。

- (5)

(4)より、 $n\geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n p_k &= \sum_{k=2}^n \left\{ \frac{f(k)}{3^k} - \frac{f(k+1)}{3^{k+1}} \right\} \\ &= \frac{f(2)}{9} - \frac{f(n+1)}{3^{n+1}} \\ &= 1 - \frac{3(n+1)^2-3(n+1)+3}{3^{n+1}} \\ &= 1 - \frac{n^2+n+1}{3^n} \end{aligned}$$

である。また、 $n=1$ のとき求める確率は0に等しいが、 $1-\frac{n^2+n+1}{3^n}$ に $n=1$ を代入すると

$1-\frac{1^2+1+1}{3}=0$ となるため、上式は任意の自然数 n について成立する。

【解答】

(1)	キ			
	$\frac{\sqrt{6}}{2}$			
(2)	ク	ケ	コ	
	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{2}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	
(3)	サ			
	$\frac{1}{3}$			

【解説】

(1)

 $\triangle OAB$ の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}&=\frac{1}{2}\sqrt{|(1,1,1)|^2|(2,1,0)|^2-\{(1,1,1)\cdot(2,1,0)\}^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{3\cdot 5-3^2}\\&=\frac{\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

である。

(2)

$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の両方に垂直であり、かつ大きさが1で x 成分が正のベクトルを $\vec{h}=(a,b,c)$ とおくと

$$\begin{aligned}\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot\vec{h}=0\\\overrightarrow{OB}\cdot\vec{h}=0\end{cases}\\\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c=0\\2a+b=0\end{cases}\end{aligned}$$

が成り立ち、この連立方程式によって $b=-2a, c=a$ が導ける。ここで、 $|\vec{h}|^2=1$ かつ $a>0$ だから

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=1\\\Leftrightarrow 6a^2&=1\\\therefore a&=\frac{1}{\sqrt{6}}\end{aligned}$$

である。したがって、求めるベクトルは

$$\vec{h}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

である。

(3)

(2)で求めたベクトル $\vec{h}$ は平面 OAB に対して垂直であるから、点 C から $\triangle OAB$ に下ろした垂線の足を H とおくと、実数 p を用いて $\overrightarrow{CH}=p\vec{h}$ と表せる。また点 H は平面 OAB 上にあるから、実数 s, t を用いて $\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ と表せる。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}&=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CH}\\\Leftrightarrow s(1,1,1)+t(2,1,0)&=(2,4,8)+\left(\frac{p}{\sqrt{6}}, -\frac{2p}{\sqrt{6}}, \frac{p}{\sqrt{6}}\right)\\\Leftrightarrow\begin{cases}s+2t=2+\frac{p}{\sqrt{6}}\\s+t=4-\frac{2p}{\sqrt{6}}\\s=8+\frac{p}{\sqrt{6}}\end{cases}\end{aligned}$$

が成り立つ。この連立方程式を解くと $s=\frac{23}{3}, t=-3, p=-\frac{\sqrt{6}}{3}$ と求められる。したがって

$$|\overrightarrow{CH}|=|p\vec{h}|=|p|=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

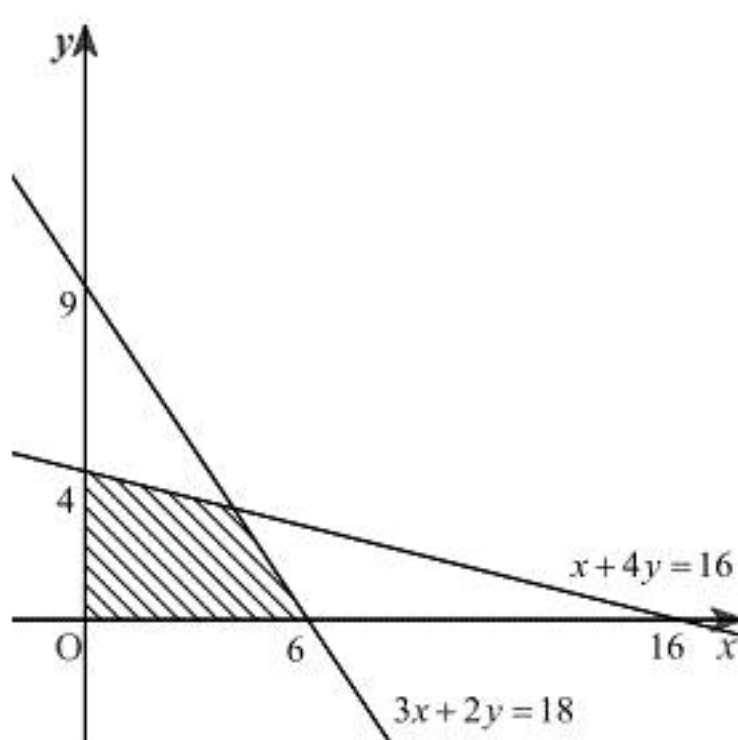
であるから、(1)で求めた値も用いると、四面体 $OABC$ の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{1}{3}$$

である。

(1)

直線 $3x+2y=18$ の x 切片は 6, y 切片は 9 である。また直線 $x+4y=16$ の x 切片は 16, y 切片は 4 である。これに基づいて領域 D を図示すると次図のようになる。ただし、境界は全て含む。



(答) 上図

(2)

$$3x+2y=18$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x+9 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x+4y=16$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x+4 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。①と②を連立すると

$$-\frac{3}{2}x+9 = -\frac{1}{4}x+4$$

$$\Leftrightarrow x=4$$

であるから、①と②の交点は $(4, 3)$ である。ここで $x+y=k$ とおくと

$$y = -x+k \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立つ。これより、 k は③の y 切片として表せる。③の傾きは -1 であり、①の傾き $-\frac{3}{2}$

より大きく②の傾き $-\frac{1}{4}$ より小さいから、③が点 $(4, 3)$ を通る時に k は最大値をとる。したがって最大値は 7 である。

(答) 7

(3)

$$2x+y=k \text{ とおくと}$$

$$y = -2x+k \quad \dots \textcircled{4}$$

が成り立つ。これより、 k は④の y 切片として表せる。④の傾きは -2 であり、①の傾き $-\frac{3}{2}$

より小さいから、④が点 $(6, 0)$ を通る時に k は最大値をとる。したがって最大値は 12 である。

(答) 12

(4)

$$ax+y=k \text{ とおくと}$$

$$y = -ax+k \quad \dots \textcircled{5}$$

が成り立つ。これより、 k は⑤の y 切片として表せる。 $a > 0$ であることに注意して、以下のように a の値によって場合分けする。

[1] $0 < a < \frac{1}{4}$ のとき

$-\frac{1}{4} < -a < 0$ である。よって⑤の傾き $-a$ は②の傾き $-\frac{1}{4}$ より大きいから、⑤が点 $(0, 4)$ を通る時に k は最大値をとる。したがって最大値は 4 である。

[2] $\frac{1}{4} \leq a < \frac{3}{2}$ のとき

$-\frac{3}{2} < -a \leq -\frac{1}{4}$ である。よって⑤の傾き $-a$ は①の傾き $-\frac{3}{2}$ より大きく②の傾き $-\frac{1}{4}$ 以下であるから、⑤が点 $(4, 3)$ を通る時に k は最大値をとる。したがって最大値は $4a+3$ である。

[3] $\frac{3}{2} \leq a$ のとき

$-a \leq -\frac{3}{2}$ である。よって⑤の傾き $-a$ は①の傾き $-\frac{3}{2}$ 以下であるから、⑤が点 $(6, 0)$ を通る時に k は最大値をとる。したがって最大値は $6a$ である。

以上[1], [2], [3]より $ax+y$ の最大値は

$$\begin{cases} 4 & (0 < a < \frac{1}{4} \text{ のとき}) \\ 4a+3 & (\frac{1}{4} \leq a < \frac{3}{2} \text{ のとき}) \\ 6a & (\frac{3}{2} \leq a \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。

$$(答) \begin{cases} 4 & (0 < a < \frac{1}{4} \text{ のとき}) \\ 4a+3 & (\frac{1}{4} \leq a < \frac{3}{2} \text{ のとき}) \\ 6a & (\frac{3}{2} \leq a \text{ のとき}) \end{cases}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2e^{2x} \sin 2x + e^{2x} \cdot 2 \cos 2x \\
 &= 2e^{2x} (\sin 2x + \cos 2x) \\
 f''(x) &= 4e^{2x} (\sin 2x + \cos 2x) + 2e^{2x} \cdot 2 (\cos 2x - \sin 2x) \\
 &= 8e^{2x} \cos 2x
 \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2e^{2x} (\sin 2x + \cos 2x) \\
 &= 2e^{2x} \cdot \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \sin 2x + \sin \frac{\pi}{4} \cos 2x \right) \\
 &= 2\sqrt{2}e^{2x} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)
 \end{aligned}$$

と変形できる。したがって $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$-\frac{\pi}{2}$	...	$-\frac{\pi}{4}$	...	$-\frac{\pi}{8}$	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{3}{8}\pi$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		-		-	0	+		+	0	-	
$f''(x)$		-	0	+		+	0	-		-	
$f(x)$	0	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0

上表より、 $y = f(x)$ は $x = -\frac{\pi}{8}$ で極小値

$$f\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}}{2}$$

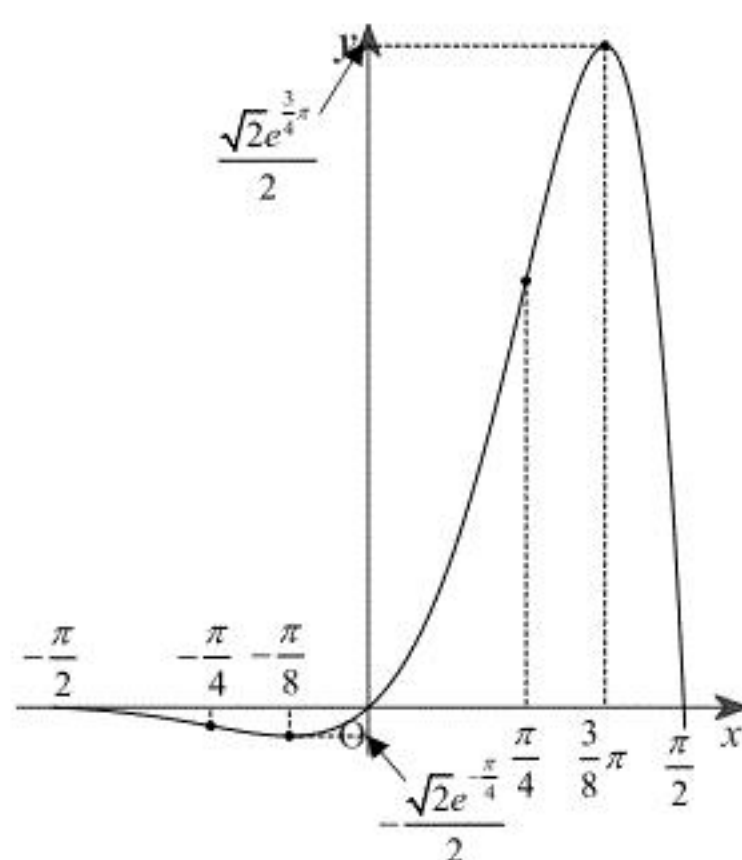
をとり、 $x = \frac{3}{8}\pi$ で極大値

$$f\left(\frac{3}{8}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi}}{2}$$

をとる。また、変曲点は $\left(-\frac{\pi}{4}, f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right), \left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ 、すなわち $\left(-\frac{\pi}{4}, -e^{-\frac{\pi}{2}}\right), \left(\frac{\pi}{4}, e^{\frac{\pi}{2}}\right)$ の2点である。

さらに、 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ であることに注意すると、上表より、

$y = f(x) \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ のグラフの概形は次図のようになる。



(答) 増減、グラフの凹凸：上表・上図

極値： $x = -\frac{\pi}{8}$ で極小値 $-\frac{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}}{2}$ ， $x = \frac{3}{8}\pi$ で極大値 $\frac{\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi}}{2}$

変曲点： $\left(-\frac{\pi}{4}, -e^{-\frac{\pi}{2}}\right), \left(\frac{\pi}{4}, e^{\frac{\pi}{2}}\right)$

(2)

$$\begin{aligned}
 (e^{2x} \sin 2x)' &= 2e^{2x} (\sin 2x + \cos 2x) \\
 (e^{2x} \cos 2x)' &= 2e^{2x} (\cos 2x - \sin 2x)
 \end{aligned}$$

であるから、

$$e^{2x} \sin 2x = \frac{1}{4} (e^{2x} \sin 2x)' - \frac{1}{4} (e^{2x} \cos 2x)'$$

である。したがって

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} f(x) dx &= \frac{1}{4} [e^{2x} \sin 2x]_0^{\pi} - \frac{1}{4} [e^{2x} \cos 2x]_0^{\pi} \\
 &= -\frac{1}{4} e^{\pi} \cdot (-1) + \frac{1}{4} e^0 \\
 &= \frac{e^{\pi} + 1}{4}
 \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{e^{\pi} + 1}{4}$

(1)

$$\begin{aligned}
 S(t) &= \int_t^{t+1} x e^{-x} dx \\
 &= \left[-x e^{-x} \right]_t^{t+1} + \int_t^{t+1} e^{-x} dx \\
 &= \left[-(x+1) e^{-x} \right]_t^{t+1} \\
 &= -(t+2) e^{-t-1} + (t+1) e^{-t}
 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S(t) = -(t+2)e^{-t-1} + (t+1)e^{-t}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 S'(t) &= -e^{-t-1} + (t+2)e^{-t-1} + e^{-t} - (t+1)e^{-t} \\
 &= (t+1)e^{-t-1} - t e^{-t} \\
 &= e^{-t-1} (t+1 - e t) \\
 &= e^{-t-1} \{(1-e)t + 1\}
 \end{aligned}$$

であるから、 $0 \leq t \leq 1$ における増減表は以下のようになる。

t	0		$\frac{1}{e-1}$		1
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

上表より、 $S(t)$ は $t = \frac{1}{e-1}$ で最大値をとる。また、 $S(0) = -\frac{2}{e} + 1$ 、 $S(1) = -\frac{3}{e^2} + \frac{2}{e}$ であり、

$$\begin{aligned}
 S(0) - S(1) &= \frac{3}{e^2} - \frac{4}{e} + 1 \\
 &= \left(\frac{1}{e} - 1 \right) \left(\frac{3}{e} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

である。 $2 < e < 3$ だから $\frac{1}{e} - 1 < 0$ 、 $\frac{3}{e} - 1 > 0$ より、 $S(0) - S(1) < 0$ 、すなわち $S(0) < S(1)$ である。したがって $S(t)$ は $t=0$ で最小値をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最大にする } t \text{ の値: } t = \frac{1}{e-1}, \text{ 最小にする } t \text{ の値: } t = 0$$