

〔解答〕

(1)	1	2	3					
	－	1	2					
(2)	4	5	6					
	3	6	2					
(3)	7	8	9	10	11	12	13	14
	7	1	8	1	3	5	6	6
(4)	15	16	17	18				
	2	5	3	6				

〔解説〕

(1)

 $\overrightarrow{AB} = (3, -3, 0), \overrightarrow{AC} = (-1, 3, -1)$ であるため、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 3 \cdot (-1) + (-3) \cdot 3 + 0 \cdot (-1) \\ &= -12\end{aligned}$$

となる。

(2)

求める面積を S_1 とおく。

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AB}|^2 &= 3^2 + (-3)^2 + 0^2 = 18 \\ |\overrightarrow{AC}|^2 &= (-1)^2 + 3^2 + (-1)^2 = 11\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{18 \cdot 11 - (-12)^2} \\ &= \frac{3\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

となる。

(3)

点 H は平面 α 上の点であるため、実数 k, l を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= k \overrightarrow{AB} + l \overrightarrow{AC} \\ &= (3k - l, -3k + 3l, -l)\end{aligned}$$

と表すことができ、これを用いて $\overrightarrow{OH}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} \\ &= (3k - l, -3k + 3l + 1, -l + 2)\end{aligned}$$

となる。 $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ であるため、

$$\begin{aligned}&\begin{cases} \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3(3k - l) - 3(-3k + 3l + 1) = 0 \\ -(3k - l) + 3(-3k + 3l + 1) - (-l + 2) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{7}{18} \\ l = \frac{1}{3} \end{cases}\end{aligned}$$

と求まる。よって、 $\overrightarrow{AH} = \frac{7}{18} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$ である。また $\overrightarrow{OH} = \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{3} \right)$ であるため、

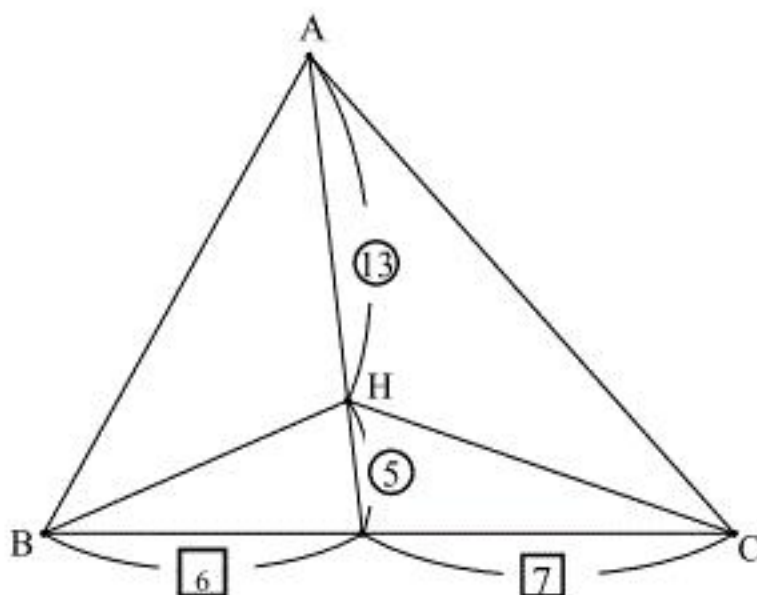
$$|\overrightarrow{OH}| = \frac{5\sqrt{6}}{6} \text{ である。}$$

(4)

(3) より $\overrightarrow{AH} = \frac{7}{18} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$ であるため、点 H は $\triangle ABC$ の内部にあることがわかる。また、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= \frac{7}{18} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{13}{18} \left(\frac{7}{13} \overrightarrow{AB} + \frac{6}{13} \overrightarrow{AC} \right)\end{aligned}$$

と変形できるため、点 H の位置関係は以下の図のようになる。

よって、 $\triangle HBC$ の面積を S_2 とおくと、

$$\begin{aligned}S_2 &= \frac{5}{18} S_1 \\ &= \frac{5\sqrt{6}}{12}\end{aligned}$$

となる。よって求める四面体の体積は、 $\frac{5\sqrt{6}}{12} \cdot \frac{5\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{25}{36}$ である。

〔解答〕

(1)	19	20					
	1	4					
(2)	21	22	23	24	25	26	27
	1	5	3	2	5	1	6
(3)	28	29	30	31			
	1	7	2	0			

〔解説〕

(1)

1回の操作につき石は高々1個しか置けないから、3回目の操作後に机の上に石がちょうど3個あるのは同じ色が3回連続で出るときに限るため、求める確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2 = \frac{1}{4}$ である。

(2)

6回目の操作後に机の上に石がちょうど2個あるためには、表が4回、裏が2回出る、または表が2回、裏が4回出ることが条件である。よって求める確率は、 ${}_6C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 = \frac{15}{32}$ である。また、石が1個もないようにするためには表が3回、裏が3回出ることが条件である。よって求める確率は、 ${}_6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$ である。

(3)

6回目の操作後に机の上にある石が2個以下である事象をA、8回目の操作後に机の上にある石が2個以下である事象をBとする。1回の操作で石の数は1個増えるもしくは1個減るから、偶数回目の操作後に机の上にある石は偶数個となる。よって6回目の操作後に机の上に石がちょうど1個ある事象は起こり得ないから、(2)より、事象Aが起こる確率 $P(A)$ は、

$$P(A) = \frac{15}{32} + \frac{5}{16} = \frac{25}{32}$$

である。次に、事象Aと事象Bが同時に起こる確率 $P(A \cap B)$ を求める。6回目の操作後に机の上に石がちょうど2個あり、かつ8回目の操作後に机の上にある石の数が2個以下であることは、6回目の操作後に机の上にはない色の面が少なくとも1回出ることと同値であるから、その確率は $\frac{15}{32} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{45}{128}$ である。6回目の操作後に机の上に石がないとき、8回

目の操作後に机の上にある石の数は必ず2個以下となることを考慮すると、事象Aと事象Bが同時に起こる確率は

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{45}{128} + \frac{5}{16} \\ &= \frac{85}{128} \end{aligned}$$

となる。よって、求める条件付き確率 $P_A(B)$ は

$$\begin{aligned} P_A(B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{17}{20} \end{aligned}$$

となる。

(1)

$A(4, 0)$, $P(p, -p^2 + 4p)$ より, 直線 AP の傾きは $\frac{(-p^2 + 4p) - 0}{p - 4} = -p$ となる。放物線 C 上の、傾きが $-p$ となる点の x 座標は, $y' = -2x + 4$ より

$$\begin{aligned} -2x + 4 &= -p \\ \Leftrightarrow x &= \frac{p+4}{2} \end{aligned}$$

である。また, 放物線 C 上の点 $(t, -t^2 + 4t)$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y - (-t^2 + 4t) &= (-2t + 4)(x - t) \\ \Leftrightarrow y &= (-2t + 4)x + t^2 \end{aligned}$$

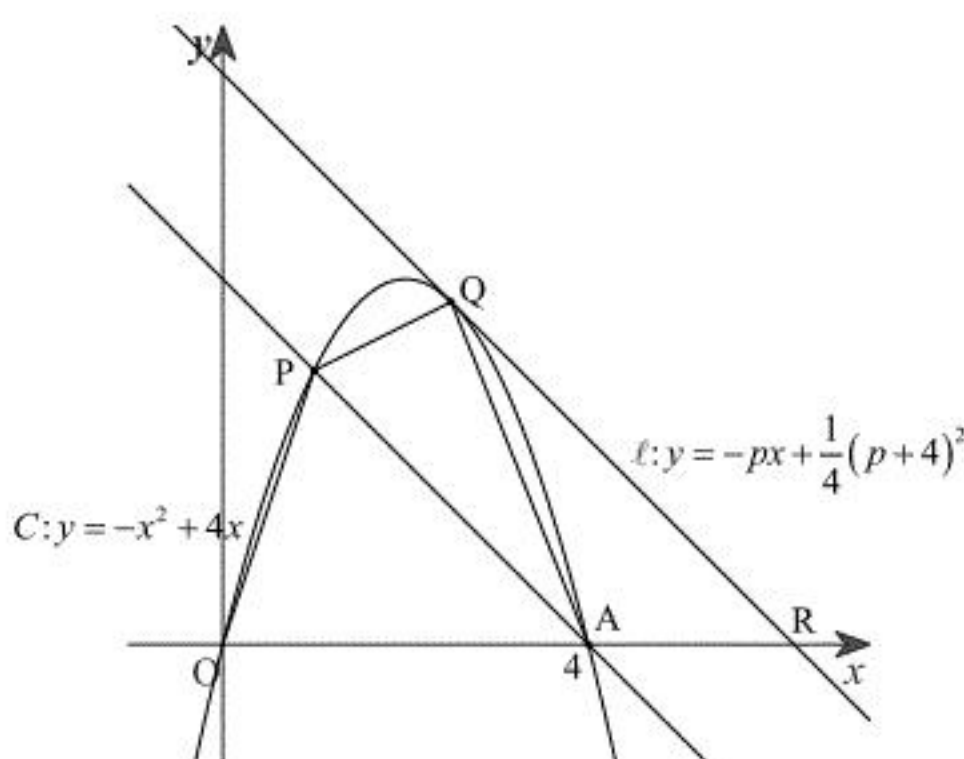
となるため, 接線 ℓ の方程式は $y = -px + \frac{1}{4}(p+4)^2$ となる。

$$(\text{答}) \quad y = -px + \frac{1}{4}(p+4)^2$$

(2)

四角形 $OAQP$ を $\triangle OAP$ と $\triangle APQ$ に分けて考える。 $\triangle OAP$ の面積を S_1 , $\triangle APQ$ の面積を S_2 とおく。点 P は固定されているため S_1 の値は一定となるから, S_2 が最大となる条件を考えればよい。底辺を AP と考えると, 高さが最大となるのは点 Q における接線と直線 AP が平行

になるときである。よって(1)より, $q = \frac{p+4}{2}$ のときに S_2 が最大となる。このときの点 Q における接線 ℓ は(1)より $y = -px + \frac{1}{4}(p+4)^2$ である。接線 ℓ と x 軸との交点を R とおくと, 以下の図からわかるように $\triangle APR$ の面積は S_2 と等しくなる。



ゆえに, 四角形 $OAQP$ の面積 $S_1 + S_2$ は $\triangle OPR$ の面積と等しくなる。ここで点 R の x 座標は $\frac{(p+4)^2}{4p}$ であるため, 求める面積は,

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(p+4)^2}{4p} \cdot (-p^2 + 4p) \\ &= \frac{1}{8}(4-p)(4+p)^2 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{8}(4-p)(4+p)^2$$

(3)

$$S(p) = \frac{1}{8}(4-p)(4+p)^2 \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} S'(p) &= \frac{1}{8} \{ (-1) \cdot (4+p)^2 + (4-p) \cdot 2(4+p) \} \\ &= \frac{1}{8}(4+p)(4-3p) \end{aligned}$$

となるから, $S(p)$ の増減は以下のようになる。

p	(0)	...	$\frac{4}{3}$	...	(4)
$S'(p)$		+	0	-	
$S(p)$		↗	極大	↘	

したがって, $S(p)$ は $p = \frac{4}{3}$ のときに最大値をとり, そのときの値は $S\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{256}{27}$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{256}{27}$$

(1)

y を x について微分すると、

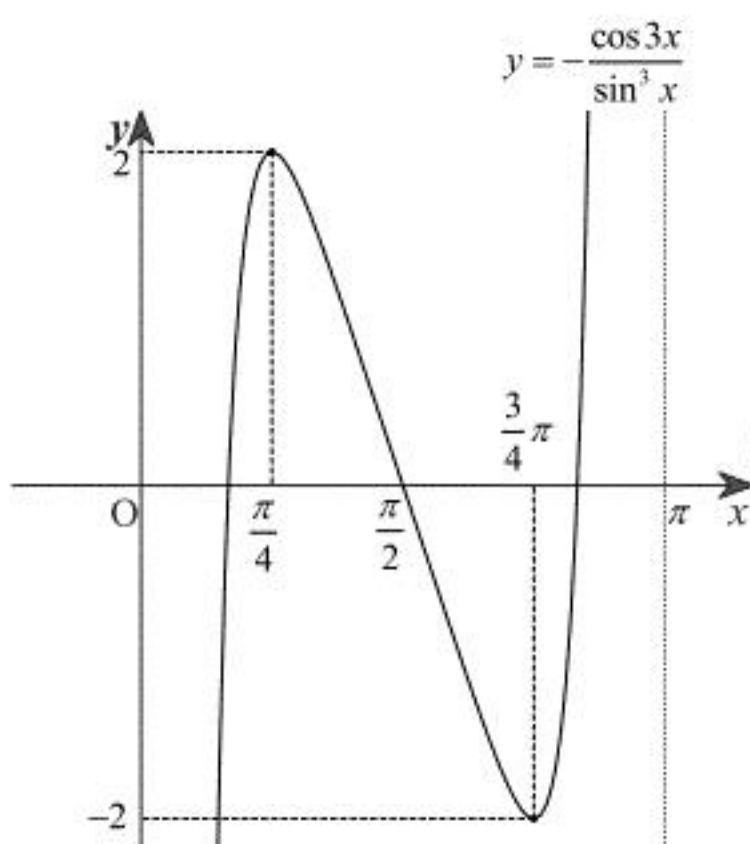
$$\begin{aligned}
 y' &= -\frac{(\cos 3x)' \sin^3 x - \cos 3x (\sin^3 x)'}{(\sin^3 x)^2} \\
 &= -\frac{-3 \sin 3x \sin^3 x - \cos 3x \cdot 3 \sin^2 x \cos x}{\sin^6 x} \\
 &= 3 \cdot \frac{\sin 3x \sin x + \cos 3x \cos x}{\sin^4 x} \\
 &= \frac{3}{\sin^4 x} \left\{ -\frac{1}{2} (\cos 4x - \cos 2x) + \frac{1}{2} (\cos 4x + \cos 2x) \right\} \\
 &= \frac{3 \cos 2x}{\sin^4 x}
 \end{aligned}$$

となる。よって $0 < x < \pi$ の範囲において $y' = 0$ となるのは、 $\cos 2x = 0$ 、すなわち $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$

のときである。また、 $\lim_{x \rightarrow +0} y' = \infty$ 、 $\lim_{x \rightarrow \pi-0} y' = \infty$ であるため、 y の増減は以下のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	(π)
y'	$(+\infty)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$(+\infty)$
y		$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	

したがって、 $x = \frac{\pi}{4}$ のときに極大値 2 をとり、 $x = \frac{3}{4}\pi$ のときに極小値 -2 をとる。また、図示すると以下のようになる。



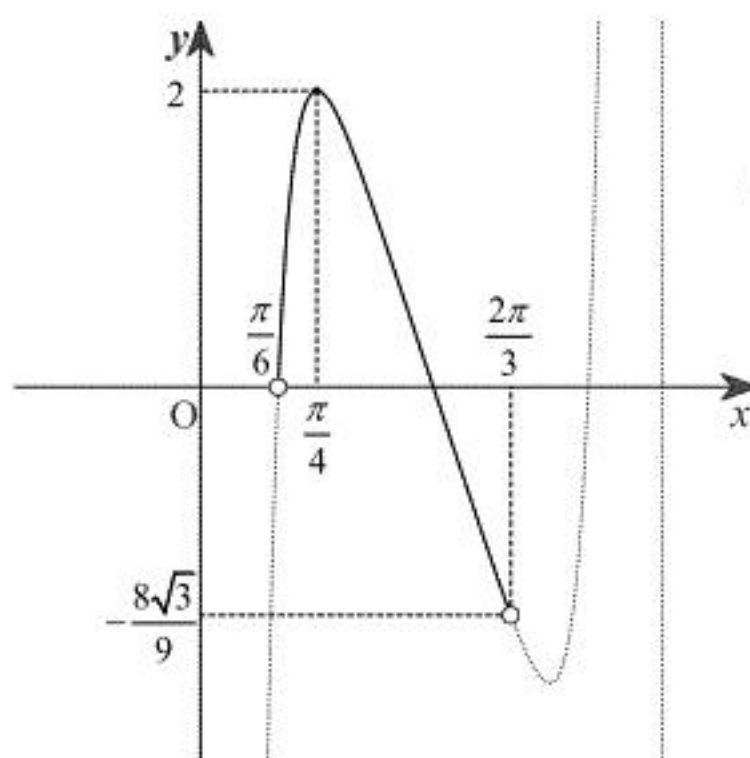
(答) 極大値 $2 \left(x = \frac{\pi}{4} \right)$ ，極小値 $-2 \left(x = \frac{3}{4}\pi \right)$ ，上図

(2)

$\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3}$ のとき $\sin x \neq 0$ であるため、方程式の両辺を $\sin^3 x$ で割ると $-\frac{\cos 3x}{\sin^3 x} = a$ となる。

この方程式の実数解は、関数 $y = -\frac{\cos 3x}{\sin^3 x}$ のグラフと直線 $y = a$ の共有点の x 座標である。関

数 $y = -\frac{\cos 3x}{\sin^3 x}$ のグラフは 2 点 $(x, y) = \left(\frac{\pi}{6}, 0 \right), \left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{8\sqrt{3}}{9} \right)$ を通るため、(1) よりその範囲を図示すると以下の図のようになる。



上図より、関数 $y = -\frac{\cos 3x}{\sin^3 x}$ のグラフと直線 $y = a$ が $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3}$ の範囲で共有点をもつような

a の値の範囲は $-\frac{8\sqrt{3}}{9} < a \leq 2$ である。

(答) $-\frac{8\sqrt{3}}{9} < a \leq 2$

(1)

部分積分を用いることにより,

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \int_1^e \log x \, dx \\
 &= \int_1^e (x)' \log x \, dx \\
 &= [x \log x]_1^e - \int_1^e dx \\
 &= e - [x]_1^e \\
 &= e - (e - 1) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

と求められる。

(答) $a_1 = 1$

(2)

$1 \leq x \leq e$ の範囲では $0 \leq \log x \leq 1$ であるから,

$$0 \leq (\log x)^n \leq 1$$

が常に成り立つ。それぞれ1から e まで積分すると,

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \int_1^e (\log x)^n \, dx \leq \int_1^e dx \\
 &\Leftrightarrow 0 \leq \int_1^e (\log x)^n \, dx \leq e - 1 \\
 &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{n!} \int_1^e (\log x)^n \, dx \leq \frac{e-1}{n!} \quad (\because n! \neq 0)
 \end{aligned}$$

となるから, 不等式 $0 \leq a_n \leq \frac{e-1}{n!}$ が成り立つ。

(証明終)

(3)

部分積分を用いると,

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{n!} \int_1^e (x)' (\log x)^n \, dx \\
 &= \frac{1}{n!} \left\{ \left[x (\log x)^n \right]_1^e - \int_1^e x \cdot n (\log x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} \, dx \right\} \\
 &= \frac{1}{n!} \left\{ e - n \int_1^e (\log x)^{n-1} \, dx \right\} \\
 &= \frac{e}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} \int_1^e (\log x)^{n-1} \, dx \\
 &= \frac{e}{n!} - a_{n-1}
 \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(4)

(3)より, $\frac{1}{n!} = \frac{1}{e} (a_{n-1} + a_n)$ と変形できる。よって,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k!} &= \frac{1}{e} \sum_{k=2}^n (-1)^k (a_{k-1} + a_k) \\
 &= \frac{1}{e} \left\{ (a_1 + a_2) - (a_2 + a_3) + (a_3 + a_4) - \cdots + (-1)^n (a_{n-1} + a_n) \right\} \\
 &= \frac{1}{e} \left\{ a_1 + (-1)^n a_n \right\} \\
 &= \frac{1}{e} + (-1)^n \cdot \frac{a_n}{e}
 \end{aligned}$$

となる。(2)および $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e-1}{n!} = 0$ から, はさみうちの原理より $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ である。よって,

$0 \leq \left| (-1)^n \cdot \frac{a_n}{e} \right| \leq \frac{a_n}{e}$ であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{e} = 0$ から, はさみうちの原理より $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \frac{a_n}{e} = 0$ である。

したがって,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{e} + (-1)^n \cdot \frac{a_n}{e} \right\} \\
 &= \frac{1}{e}
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{e}$