

【解答】

(1)	1	2	3	4	5
	－	2	2	－	2
(2)	6	7	8	9	
	3	1	0	6	
(3)	10	11			
	1	4			
(4)	12	13	14		
	－	2	6		

【解説】

(1)

まず $x > 0$ のとき、 $x > 0, \frac{1}{x} > 0$ であるから、相加平均・相乗平均の関係より、

$$\begin{aligned} t &\geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。このとき等号成立条件は $x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1 (\because x > 0)$ である。ここで、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) = \infty$ で

あるから、 $x > 0$ のとき t のとり得る値の範囲は $t \geq 2$ である。次に $x < 0$ のとき、 $x' = -x$ とお

くと $x' > 0, \frac{1}{x'} > 0$ である。このとき

$$\begin{aligned} t &= x + \frac{1}{x} \\ &= -\left(x' + \frac{1}{x'}\right) \end{aligned}$$

であり、 $t' = x' + \frac{1}{x'}$ とおくと $t' = -t$ となる。すると、 $x > 0$ のときと同様にして、 $x' > 0$ のとき

t' のとり得る値の範囲は $t' \geq 2$ である。したがって、 $x < 0$ のとき t のとり得る値の範囲は

$t \leq -2$ である。以上をまとめて、 x が 0 でない実数を動くとき、 t のとり得る値の範囲は

$$t \leq -2, 2 \leq t$$

である。ここで、 $x + \frac{1}{x} = t$ の両辺を 2 乗すると

$$\begin{aligned} x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} &= t^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} &= t^2 - 2 \end{aligned}$$

が得られる。これと $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + b$ を比較すると、 $b = -2$ が導かれる。

(2)

$x \neq 0$ より、方程式(*)の両辺を x^2 で割ると

$$\begin{aligned} 3x^2 - 10x + a - \frac{10}{x} + \frac{3}{x^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + a &= 0 \end{aligned}$$

となる。これと $x + \frac{1}{x} = t, x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ より

$$\begin{aligned} 3(t^2 - 2) - 10t + a &= 0 \\ \Leftrightarrow 3t^2 - 10t + a - 6 &= 0 \quad \cdots (**) \end{aligned}$$

となる。

(3)

x の方程式(*)が実数解をもつことは、 t の方程式(**)が $t \leq -2, 2 \leq t$ の範囲で少なくとも 1 つの実数解をもつことと同値である。よって、 $f(t) = 3t^2 - 10t + a - 6$ とおくと、 $y = f(t)$ のグラフは下に凸な放物線であるから、求める範囲は $f(-2) \leq 0$ または $f(2) \leq 0$ である。ここで

$$\begin{aligned} f(2) &= 3 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 + a - 6 \\ &= a - 14 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-2) &= 3 \cdot (-2)^2 - 10 \cdot (-2) + a - 6 \\ &= a + 26 \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

より、 a のとり得る値の範囲は $a \leq 14$ または $a \leq -26$ である。つまり、 $a \leq 14$ である。

(4)

x の方程式 $x + \frac{1}{x} = t$ が相異なる 2 つの実数解をもつ条件は、(1)より $t < -2, 2 < t$ である。よっ

て、 x の方程式(*)が相異なる 4 つの実数解をもつことは、 t の方程式(**)が $t < -2, 2 < t$ の範囲で相異なる 2 つの実数解をもつことと同値である。よって、 $y = f(t)$ のグラフは下に凸な放物線であるから、求める条件は $f(-2) < 0$ かつ $f(2) < 0$ である。これと①、②より、 a のとり得る値の範囲は $a < 14$ かつ $a < -26$ である。つまり、 $a < -26$ である。

【解答】

(1)	15	16	17	18			
	3	1	6	6			
(2)	19	20	21	22	23	24	25
	—	2	7	3	1	6	0
(3)	26	27	28	29	30	31	
	1	3	3	5	1	2	

【解説】

(1)

三角関数の半角の公式より

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 2x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 4x}{2} dx \\
 &= \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{8} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
 &= \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{16} \right) - (0 - 0) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{\pi}{6}
 \end{aligned}$$

となる。

(2)

三角関数の積和の公式 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$ より

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cos \frac{x}{3} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \left\{ \cos \left(3x + \frac{x}{3} \right) + \cos \left(3x - \frac{x}{3} \right) \right\} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \cos \frac{10}{3}x + \frac{1}{2} \cos \frac{8}{3}x \right) dx \\
 &= \left[\frac{3}{20} \sin \frac{10}{3}x + \frac{3}{16} \sin \frac{8}{3}x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \left(-\frac{3\sqrt{3}}{40} - \frac{3\sqrt{3}}{32} \right) - (0 + 0) \\
 &= -\frac{27\sqrt{3}}{160}
 \end{aligned}$$

となる。

(3)

$\tan x$ の導関数は $\frac{1}{\cos^2 x}$ である。つまり、 $\frac{1}{\cos^2 x}$ の原始関数は $\tan x + C$ (C は積分定数) である。これより

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\
 &= \left[\tan x - x \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \\
 &= 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{5}{12}\pi
 \end{aligned}$$

となる。

(1)

線分 AC 上の点 P は、 $0 \leq s \leq 1$ を満たす実数 s を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AC} \\ &= (1, 0, 0) + s(-1, 0, 1) \\ &= (1-s, 0, s)\end{aligned}$$

と表される。この点が平面 α 上に存在するとき、 $s = \frac{k}{n}$ となりこれは $0 \leq s \leq 1$ を満たす。よ

って、平面 α と線分 AC の交点の座標は $\left(1 - \frac{k}{n}, 0, \frac{k}{n}\right)$ となる。また、線分 AD 上の点 Q は、 $0 \leq t \leq 1$ を満たす実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AD} \\ &= (1, 0, 0) + t(0, 1, 1) \\ &= (1, t, t)\end{aligned}$$

と表される。この点が平面 α 上に存在するとき、 $t = \frac{k}{n}$ となりこれは $0 \leq t \leq 1$ を満たす。よ

って、平面 α と線分 AD の交点の座標は $\left(1, \frac{k}{n}, \frac{k}{n}\right)$ となる。

(答) 平面 α と線分 AC の交点の座標: $\left(1 - \frac{k}{n}, 0, \frac{k}{n}\right)$, 平面 α と線分 AD の交点の座標: $\left(1, \frac{k}{n}, \frac{k}{n}\right)$

(2)

平面 α と線分 AC, AD, BD, BC の交点をそれぞれ点 P, Q, R, S とおくと、平面 α による四面体 ABCD の切り口は四角形 PQRS となる。(1)と同様に考えることで、点 R, S の座標はそれ

ぞれ $R\left(\frac{k}{n}, 1, \frac{k}{n}\right)$, $S\left(0, 1 - \frac{k}{n}, \frac{k}{n}\right)$ となる。ここで、 $\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{k}{n}, \frac{k}{n}, 0\right)$, $\overrightarrow{SR} = \left(\frac{k}{n}, \frac{k}{n}, 0\right)$ より

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ であるため四角形 PQRS は平行四辺形である。よって、 $S(k) = 2 \cdot (\triangle PQR \text{ の面積})$

であり、 $\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{k}{n}, \frac{k}{n}, 0\right)$, $\overrightarrow{QR} = \left(-1 + \frac{k}{n}, 1 - \frac{k}{n}, 0\right)$ であるため、

$$\begin{aligned}S(k) &= 2 \cdot \frac{1}{2} \left\{ \frac{k}{n} \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right) - \frac{k}{n} \left(-1 + \frac{k}{n}\right) \right\} \\ &= 2 \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \quad (\because 0 < k < n \text{ より } 0 < \frac{k}{n} < 1)\end{aligned}$$

となる。

(答) $S(k) = 2 \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)$

(3)

$2 \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)$ に $k = n$ を代入すると $2 \frac{n}{n} \left(1 - \frac{n}{n}\right) = 0$ となることより、区分別積分法から

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S(k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} 2 \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2 \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \\ &= \int_0^1 2x(1-x) dx \\ &= 2 \int_0^1 (x - x^2) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

と求められる。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S(k) = \frac{1}{3}$

(1)

 x と 1 の大小で場合分けする。[1] $x < 1$ のとき $|x-1| = -x+1$ であるから、 C は

$$y = -x^2 + x + 3|x-1|$$

$$\Leftrightarrow y = -x^2 - 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow y = -(x+1)^2 + 4$$

と表される。

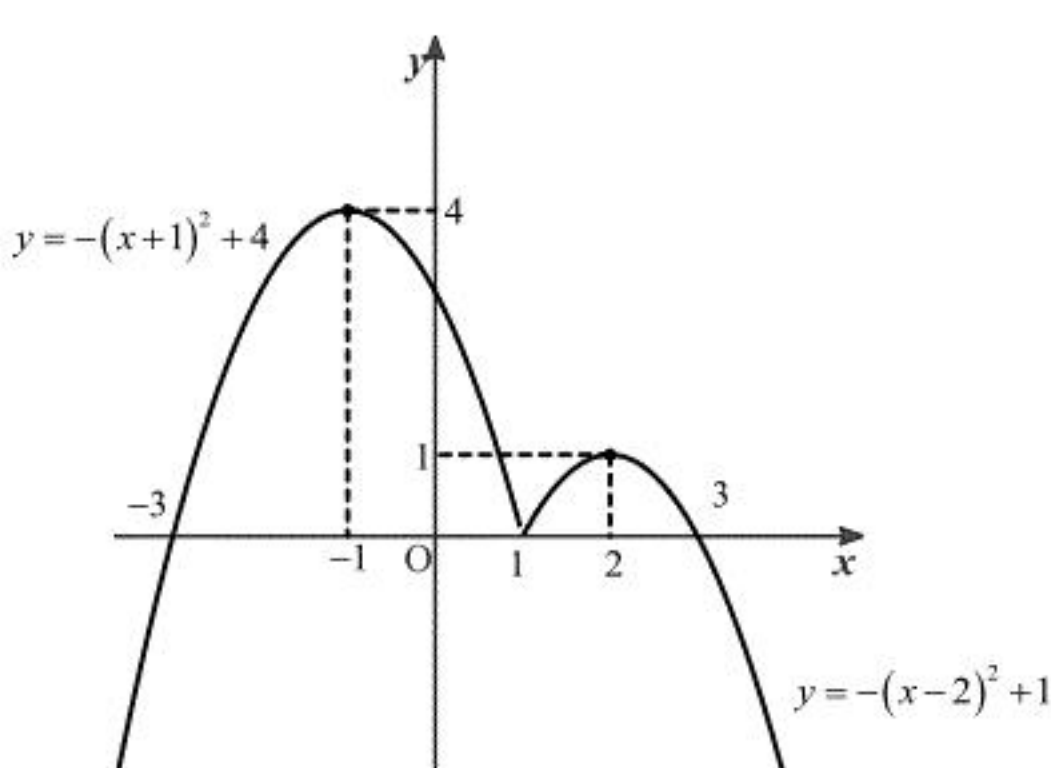
[2] $x \geq 1$ のとき $|x-1| = x-1$ であるから、 C は

$$y = -x^2 + x + 3|x-1|$$

$$\Leftrightarrow y = -x^2 + 4x - 3$$

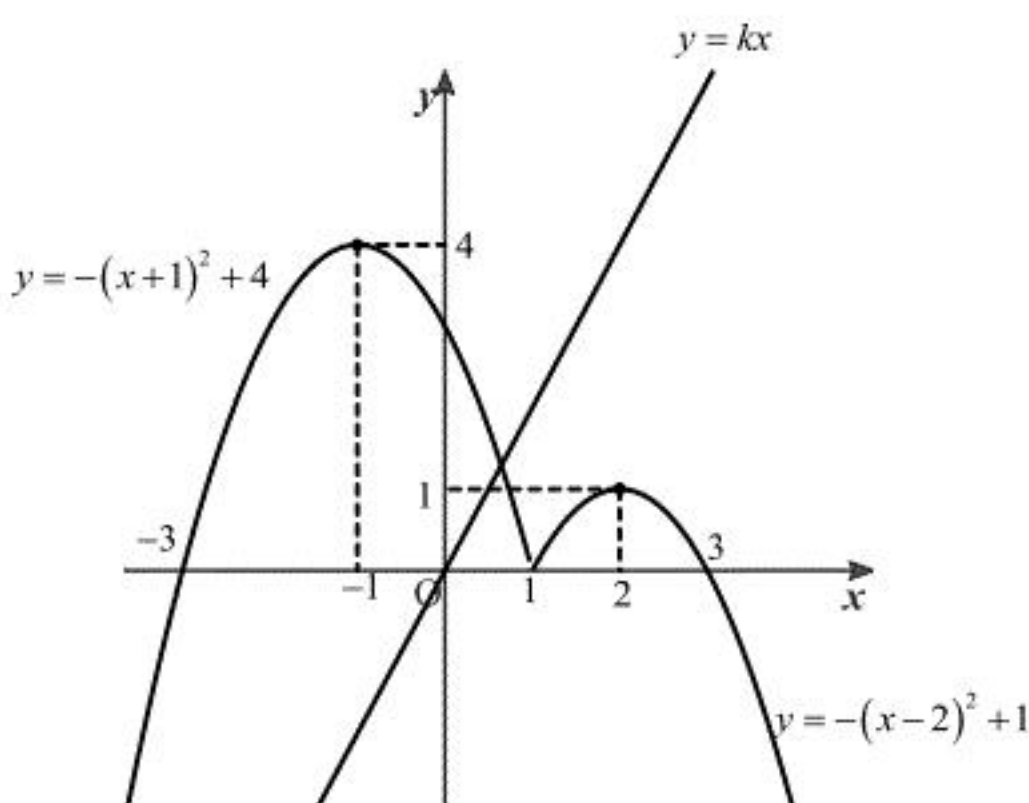
$$\Leftrightarrow y = -(x-2)^2 + 1$$

と表される。

以上[1], [2]より、 C は以下のようになる。

(答) 前図

(2)

 C と $y = kx$ を図示すると上図のようになり、 $k < 0$ のとき図より $-3 < x < 0, 3 < x$ に 1 つずつ共有点をもつため題意を満たす。また、 $k \geq 0$ のとき、図より、 $y = kx$ は $y = -(x+1)^2 + 4$ ($x \leq$ 1) と共有点を 2 個もつ。よって $y = kx$ と $y = -(x-2)^2 + 1$ ($x > 1$) が共有点をもたないような k の値の範囲を考える。 C と $y = kx$ が $x > 1$ で接するとき、その接点の x 座標を a ($a > 1$) と

すると

$$-a^2 + 4a - 3 = ka$$

$$\Leftrightarrow a^2 + (k-4)a + 3 = 0$$

であり、この a についての 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D = 0$$

$$\Leftrightarrow (k-4)^2 - 12 = 0$$

が成り立つ。よって

$$(k-4)^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow k = 4 \pm 2\sqrt{3} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また解と係数の関係より

$$2a = -(k-4)$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{-k+4}{2}$$

であり、 $a > 1$ から

$$\frac{-k+4}{2} > 1$$

$$\Leftrightarrow k < 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より

$$k = 4 - 2\sqrt{3}$$

が得られる。図より $k > 4 - 2\sqrt{3}$ のとき $y = kx$ と $y = -(x-2)^2 + 1$ ($x > 1$) は共有点をもたない。したがって、上述の議論より C と $y = kx$ との共有点がちょうど 2 個となる k の値の範囲は、

$$k < 0, k > 4 - 2\sqrt{3}$$

である。

(答) $k < 0, k > 4 - 2\sqrt{3}$

(1)

$y' = \frac{1}{x}$ より, C 上の点 $(t, \log t)$ ($t > 0$) における C の接線の方程式は

$$y = \frac{1}{t}(x-t) + \log t$$

となる。 ℓ は $(0, 0)$ を通るから

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{t}(0-t) + \log t \\ \Leftrightarrow \log t &= 1 \\ \Leftrightarrow t &= e \end{aligned}$$

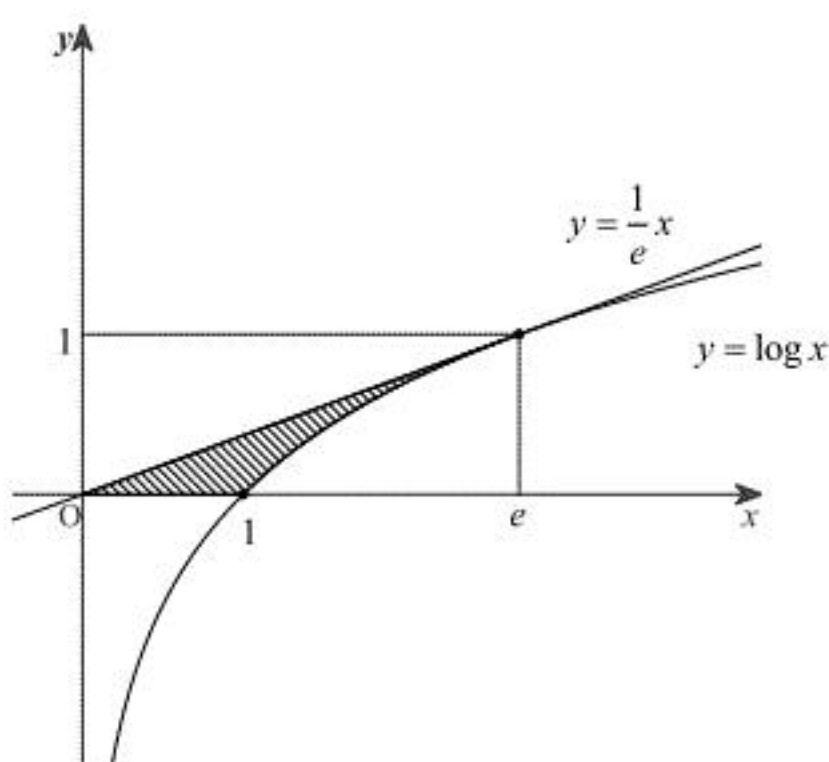
となる。したがって ℓ の方程式は

$$y = \frac{1}{e}x$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{1}{e}x$$

(2)



図形 D は前図の斜線部である。求める体積 V_1 は底面の半径が1, 高さが e の円錐の体積から, $y = \log x$, $x = e$, x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を引いた値であるから

$$V_1 = \pi \cdot 1^2 \cdot e \cdot \frac{1}{3} - \pi \int_1^e (\log x)^2 dx$$

となる。ここで, 部分積分法を用いると

$$\begin{aligned} \int_1^e (\log x)^2 dx &= \left[x(\log x)^2 \right]_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \left[x(\log x)^2 \right]_1^e - 2 \int_1^e \log x dx \\ &= \left[x(\log x)^2 - 2(x \log x - x) \right]_1^e \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

となるため,

$$V_1 = \frac{1}{3}e\pi - \pi(e-2) = \left(2 - \frac{2}{3}e\right)\pi$$

である。

$$(\text{答}) \quad \left(2 - \frac{2}{3}e\right)\pi$$

(3)

$y = \log x$ を x について解くと

$$y = \log x \Leftrightarrow x = e^y$$

となる。求める体積 V_2 は $x = e^y$, $y = 0$, $y = 1$, y 軸で囲まれた図形を y 軸のまわりに1回転してできる立体の体積から, 底面の半径が e , 高さが1の円錐の体積を引いた値であるから,

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_0^1 (e^y)^2 dy - \pi \cdot e^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} e^{2y} \right]_0^1 - \frac{1}{3} e^2 \pi \\ &= \left(\frac{1}{6} e^2 - \frac{1}{2} \right) \pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{1}{6} e^2 - \frac{1}{2} \right) \pi$$