

I

【解答】

(1)	1	2																		
	—	3																		
(2)	3	4	5	6																
	1	3	1	4																
(3)	7	8	9	10																
	2	6	2	3																
(4)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20										
	1	0	3	3	7	3	3	2	1	3										

【解説】

(1)

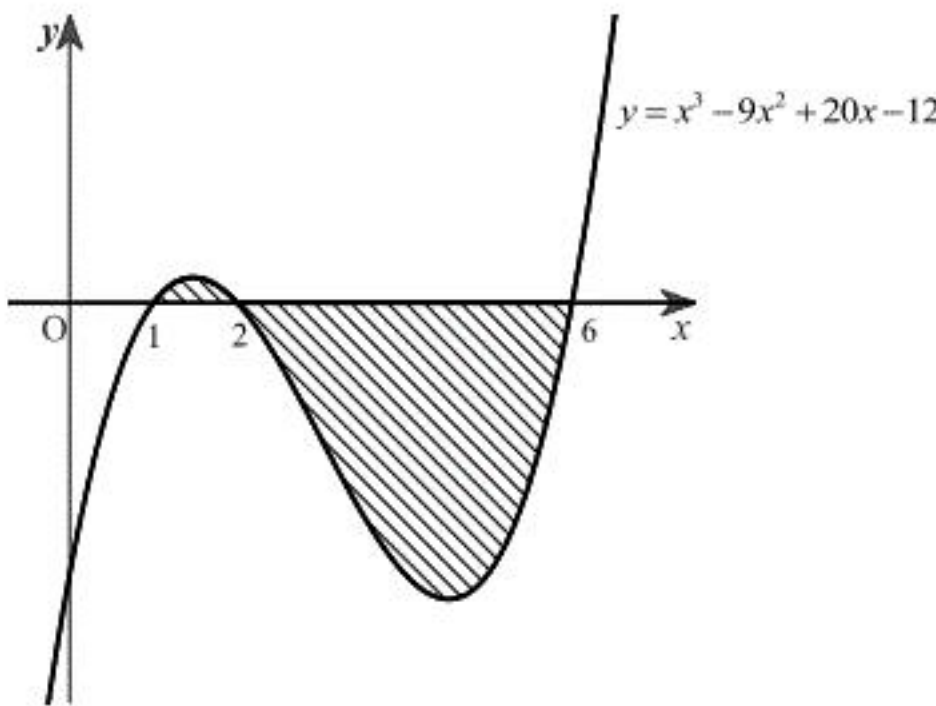
$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x - 72 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^x - 72 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x + 9\right\} \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 8\right\} &= 0 \\ \therefore \left(\frac{1}{2}\right)^x &= 8 \left(\because \left(\frac{1}{2}\right)^x > 0\right) \\ \Leftrightarrow 2^{-x} &= 2^3 \\ \therefore x &= -3 \end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned} x^3 - 9x^2 + 20x - 12 &= (x-1)(x^2 - 8x + 12) \\ &= (x-1)(x-2)(x-6) \end{aligned}$$

であるため、曲線 $y = x^3 - 9x^2 + 20x - 12$ と x 軸との交点の x 座標は $x = 1, 2, 6$ である。この曲線は3次の係数が正である3次関数であることを考慮すると、グラフの概形は次図のようになる。



このとき、曲線 $y = x^3 - 9x^2 + 20x - 12$ と x 軸で囲まれる部分は前図の斜線部となるため、その面積の和 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 (x^3 - 9x^2 + 20x - 12) dx + \int_2^6 -(x^3 - 9x^2 + 20x - 12) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 10x^2 - 12x \right]_1^2 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + 3x^3 - 10x^2 + 12x \right]_2^6 \\ &= \frac{3}{4} + 32 \\ &= \frac{131}{4} \end{aligned}$$

となる。

(3)

1.

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2ax + a^2 + 2a + 6 \\ &= (x-a)^2 + 2a + 6 \end{aligned}$$

より、この放物線の頂点 P の座標は $(a, 2a+6)$ である。

2.

Q の座標を (X, Y) とおくと、 Q は線分 PO の中点であるため $X = \frac{a}{2}, Y = a+3$ となる。このとき $a = 2X$ となるので、 $Y = 2X+3$ が成り立つ。ゆえに Q の軌跡は直線 $y = 2x+3$ である。

また、 a はすべての実数値をとるから、 $X = \frac{a}{2}$ もすべての実数値をとるため、 Q の軌跡は直線 $y = 2x+3$ 全体となる。

(4)

1.

$\triangle ABC$ に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{AB^2 + BC^2 - CA^2}{2AB \cdot BC} \\ &= \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となるため、 $0 < B < \pi$ であることを考慮すると $B = \frac{\pi}{3}$ である。したがって $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となる

から、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin B \\ &= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。

2.

求める内接円の半径を i とすると

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} (AB + BC + CA) &= S \\ \Leftrightarrow \frac{i}{2} (8 + 5 + 7) &= 10\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow 10i &= 10\sqrt{3} \\ \therefore i &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

が成り立つ。

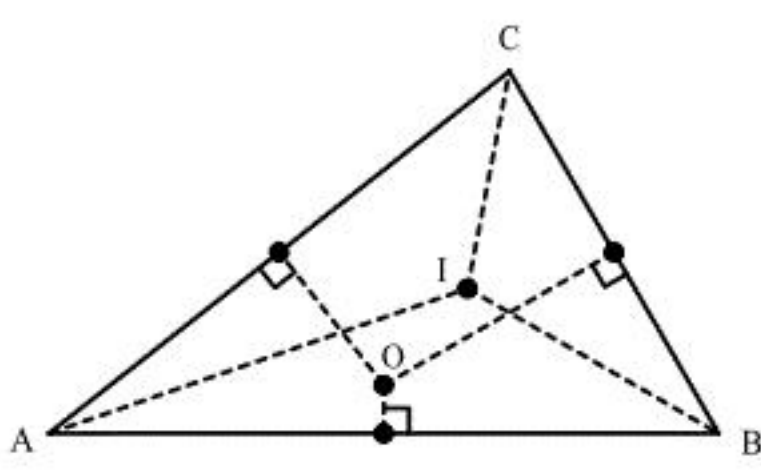
3.

求める外接円の半径を R とする。ここで、 $\triangle ABC$ に正弦定理を用いると

$$\begin{aligned} \frac{CA}{\sin B} &= 2R \\ \Leftrightarrow R &= \frac{7}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \\ \therefore R &= \frac{7\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

となる。

4.



A を原点とする座標平面上で考える。このとき $AB = 8$ より $B(8, 0)$ としてよい。さらに C を

第一象限上にとると、 $C(8 - BC \cos B, BC \sin B)$ と表せることより $C\left(\frac{11}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ である。この

下で内心 I は $\triangle ABC$ の内部の点であり、辺 AB からの距離が $i = \sqrt{3}$ であるため、実数 s を用い

て $I(s, \sqrt{3})$ とおける。ここで、内心の性質より $\angle ABI = \frac{\angle ABC}{2}$ であるので

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{8-s} &= \tan \angle ABI \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{8-s} &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \therefore s &= 5 \end{aligned}$$

となる。ゆえに $I(5, \sqrt{3})$ である。また、 $BC^2 + CA^2 - AB^2 = 5^2 + 7^2 - 8^2 = 10 > 0$ より $\triangle ABC$ は

鋭角三角形であるため、外心 O は $\triangle ABC$ の内部に存在する。ここで外心 O は線分 AB の垂直

二等分線上の点であるから、 $t > 0$ を満たす実数 t を用いて $O(4, t)$ とおける。このとき

$$\begin{aligned} AO^2 &= R^2 \\ \Leftrightarrow 4^2 + t^2 &= \frac{49}{3} \\ \Leftrightarrow t^2 &= \frac{1}{3} \\ \therefore t &= \frac{\sqrt{3}}{3} (\because t > 0) \end{aligned}$$

となる。ゆえに $O\left(4, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ である。したがって、求める線分 IO の長さは

$$\begin{aligned} IO &= \sqrt{(5-4)^2 + \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \frac{4}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{21}}{3} \end{aligned}$$

となる。

Ⅱ

【解答】

(1)	21	22	23	24		
	2	8	4	3		
(2)	25	26	27	28	29	30
	5	0	0	4	9	0
(3)	31	32				
	2	3				

【解説】

(1) x, y が自然数であるとき, $x, y \neq 0$ であることから

$$\begin{cases} 5x+2x^{a-1}y^b=26 \\ x-x^ay^{b-1}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2+2x^ay^b=26x \\ xy-x^ay^b=0 \end{cases}$$

が成り立つ。これより $x^ay^b=xy$ となるから

$$\begin{aligned} 5x^2+2xy &= 26x \\ \Leftrightarrow 5x+2y &= 26 \quad (\because x \neq 0) \end{aligned}$$

である。ここで, $(x, y)=(2, 8)$ は $5x+2y=26$ を満たすため, 辺々引き

$$\begin{aligned} 5(x-2)+2(y-8) &= 0 \\ \Leftrightarrow 5(x-2) &= 2(8-y) \end{aligned}$$

となる。この下で 2, 5 は互いに素であるため, x, y が自然数であるとき整数 k を用いて

$$\begin{cases} x-2=2k \\ 8-y=5k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2k+2 \\ y=-5k+8 \end{cases}$$

と表せる。ここで, $x, y > 0$ であることより

$$\begin{cases} 2k+2 > 0 \\ -5k+8 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 < k < \frac{8}{5}$$

$$\therefore k=0, 1$$

となるためこれらをそれぞれ代入し, $(x, y)=(2, 8), (4, 3)$ となる。

(2)

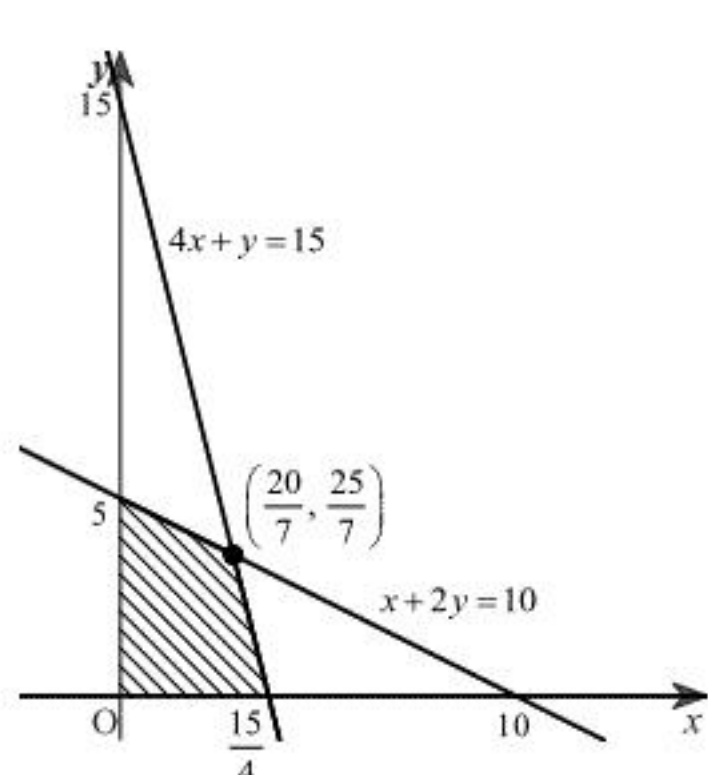
まず, 最小値について考える。 $x \geq 0, y \geq 0$ より $xy \geq 0$ が成り立つ。このとき, $(x, y)=(0, 0)$

は 4 つの不等式 $x \geq 0, y \geq 0, x+2y \leq 10, 4x+y \leq 15$ を満たし, かつ $xy=0$ となるため, $xy \geq 0$

の等号は例えば $(x, y)=(0, 0)$ で成立する。したがって xy の最小値は 0 となる。次に, 最大

値について考える。 $x \geq 0, y \geq 0, x+2y \leq 10, 4x+y \leq 15$ を満たす領域は次図斜線部となる。

ただし, 境界も含む。



ここで, 直線 $x+2y=10, 4x+y=15$ の交点の座標は, 2 式を連立して $\left(\frac{20}{7}, \frac{25}{7}\right)$ となる。この

下で, x の範囲によって場合分けして考える。

[1] $0 \leq x \leq \frac{20}{7}$ の場合

このとき $0 \leq y \leq -\frac{1}{2}x+5$ となるため

$$xy \leq x\left(-\frac{1}{2}x+5\right)$$

$$\Leftrightarrow xy \leq -\frac{1}{2}x^2+5x$$

$$\Leftrightarrow xy \leq -\frac{1}{2}(x-5)^2+\frac{25}{2}$$

が成り立つ。したがって, $0 \leq x \leq \frac{20}{7}$ での xy の最大値は, この範囲における

$-\frac{1}{2}(x-5)^2+\frac{25}{2}$ の最大値に等しい。これは $x=\frac{20}{7}$ で最大となり, その値は

$-\frac{1}{2}\left(\frac{20}{7}-5\right)^2+\frac{25}{2}=\frac{500}{49}$ である。ゆえに xy の最大値は $\frac{500}{49}$ となる。

[2] $\frac{20}{7} \leq x \leq \frac{15}{4}$ の場合

このとき $0 \leq y \leq -4x+15$ となるため

$$xy \leq x(-4x+15)$$

$$\Leftrightarrow xy \leq -4x^2+15x$$

$$\Leftrightarrow xy \leq -4\left(x-\frac{15}{8}\right)^2+\frac{225}{16}$$

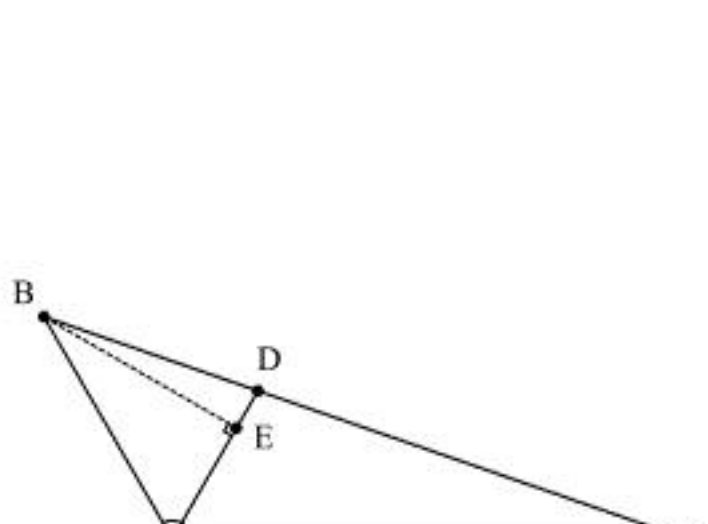
が成り立つ。したがって, $\frac{20}{7} \leq x \leq \frac{15}{4}$ での xy の最大値は, この範囲における

$-4\left(x-\frac{15}{8}\right)^2+\frac{225}{16}$ の最大値に等しい。これは $x=\frac{20}{7}$ で最大となり, その値は

$-4\left(\frac{20}{7}-\frac{15}{8}\right)^2+\frac{225}{16}=\frac{500}{49}$ である。ゆえに xy の最大値は $\frac{500}{49}$ となる。

以上[1], [2]より, いずれの場合も xy の最大値は $\frac{500}{49}$ となる。

(3)



$\triangle ABC$ に余弦定理を用いると

$$BC^2=AB^2+CA^2-2AB \cdot CA \cos A$$

$$=4^2+8^2-64 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=112$$

$$\therefore BC=4\sqrt{7}$$

となる。ここで, 角の二等分線の性質から

$$BD=\frac{AB}{AB+CA}BC$$

$$=\frac{4}{4+8} \cdot 4\sqrt{7}$$

$$=\frac{4\sqrt{7}}{3}$$

である。同様にして $CD=\frac{8\sqrt{7}}{3}$ も得られる。このとき, $\triangle ABD$ に余弦定理を用いて

$$BD^2=AB^2+DA^2-2AB \cdot DA \cos \frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{112}{9}=4^2+DA^2-8DA \cdot \sqrt{\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)+1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow DA^2-4DA+\frac{32}{9}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(DA-\frac{4}{3}\right)\left(DA-\frac{8}{3}\right)=0$$

$$\therefore DA=\frac{4}{3}, \frac{8}{3}$$

となる。一方で, $\triangle ACD$ に余弦定理を用いて

$$CD^2=AC^2+DA^2-2AC \cdot DA \cos \frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{448}{9}=8^2+DA^2-16DA \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow DA^2-8DA+\frac{128}{9}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(DA-\frac{8}{3}\right)\left(DA-\frac{16}{3}\right)=0$$

$$\therefore DA=\frac{8}{3}, \frac{16}{3}$$

が成り立つため, $DA=\frac{8}{3}$ である。ここで

$$EA=AB \cos \frac{A}{2}$$

$$=4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$=2$$

となることより, $ED=\frac{8}{3}-2=\frac{2}{3}$ となる。

Ⅲ

【解答】

(1)	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
	1	0	8	1	3	2	0	2	4	0	4	8
(2)	45	46	47	48	49	50	51					
	2	9	1	3	6	1	0					

【解説】

(1)

1.

千の位は0とならないことを考慮すると、4桁の整数の作り方は $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ (通り)であり、これらはすべて同様に確からしい。ここで、作った4桁の整数が5の倍数となるのは一の位が0または5となる場合であり、このようになるのはそれぞれ $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ (通り)、 $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ (通り)であるため、求める個数は $60 + 48 = 108$ (個)となる。

2.

千の位が3, 4, 5であれば、その他の位の数字にかかわらず2435より大きくなる。このような整数は $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 180$ (通り)である。千の位が2である整数のうち2435より大きくなるのは、百の位が5、もしくは百の位が4かつ十の位が5となる場合であるため、その場合の数は $4 \cdot 3 + 3 = 15$ (通り)である。したがって、求める確率は

$$\begin{aligned}\frac{180+15}{300} &= \frac{195}{300} \\ &= \frac{13}{20}\end{aligned}$$

である。

3.

数字の並べ方を逆にしても4桁の整数となるのは一の位が0でないものであるため、その個数は $300 - 60 = 240$ (個)となる。また、この数をもとの数に加えるとき繰り上がりは発生しないため、各桁の数がすべて偶数となるのは、もとの4桁の整数を $abcd$ と表したとき $(a, d), (b, c)$ の偶奇がそれぞれ一致する場合である。以下、 (a, d) の偶奇によって場合分けして考える。

[1] (a, d) が奇数となる場合

このとき (a, d) は $(1, 3, 5)$ 、 (b, c) は $(0, 2, 4)$ のそれぞれいずれかとなるため、このようになるのは $3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ (個)となる。

[2] (a, d) が偶数となる場合

このとき (a, d) は0でないことを考慮し $(2, 4)$ 、 (b, c) は $(1, 3, 5)$ のそれぞれいずれかとなるため、このようになるのは $2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ (個)となる。

以上[1], [2]より、求める個数は $36 + 12 = 48$ (個)となる。

(2)

1.

$a_{n+1} - a_n = 2n + 3$ より、数列 $\{a_n\}$ の階差数列は $\{2n + 3\}$ となるため、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k + 3) \\ &= 4 + n(n-1) + 3(n-1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2\end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ でも成立するため、 $n \geq 1$ で $a_n = (n+1)^2$ となる。したがって

$$\begin{aligned}a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= \sum_{k=1}^n (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6} (n+1)(n+2) \{2(n+1)+1\} - 1^2 \\ &= \frac{1}{6} \{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6 - 6\} \\ &= \frac{n(2n^2 + 9n + 13)}{6}\end{aligned}$$

である。

2.

$$\begin{aligned}b_n &> 100^{35} \\ \Leftrightarrow 5^{(n+1)^2} &> 100^{35}\end{aligned}$$

である。ここで、両辺5を底とする対数を取り

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &> 35 \log_5 100 \\ &= 70 \log_5 10 \\ &= 70(1 + \log_5 2) \\ &= 70 \cdot 1.4307 \\ &= 100.149\end{aligned}$$

となる。 $(9+1)^2 = 100$ 、 $(10+1)^2 = 121$ より、この不等式が成立するときの最小の n は10である。

IV

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6x - 9 \\ &= 3(x+3)(x-1) \end{aligned}$$

であるため、 $f(x)$ の増減は次表のようになる。

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		↗	極大	↘	極小

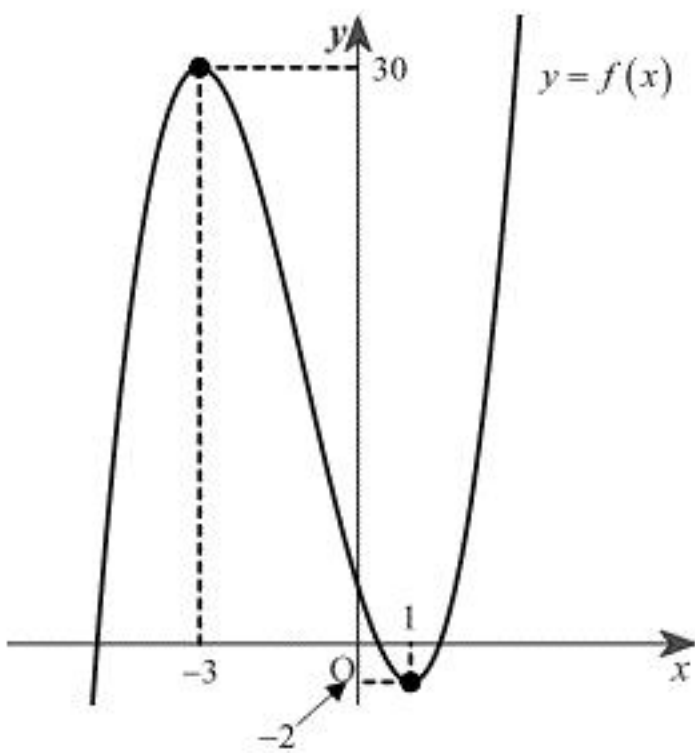
したがって $f(x)$ は $x = -3$ で極大値 $(-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 9 \cdot (-3) + 3 = 30$ をとり、 $x = 1$ で極小値 $1^3 + 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 3 = -2$ をとる。

(答) 極大値：30，極小値：-2

(2)

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - 9x + 3 - a &= 0 \\ \Leftrightarrow f(x) &= a \end{aligned}$$

であるため、方程式 $x^3 + 3x^2 - 9x + 3 - a = 0$ の異なる実数解の個数は $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = a$ の異なる共有点の個数に等しい。ここで、(1)の結果より、 $y = f(x)$ のグラフは次図のようになる。



以上より、直線 $y = a$ との異なる共有点の個数を考え、方程式 $x^3 + 3x^2 - 9x + 3 - a = 0$ の異なる実数解の個数は

$$\begin{cases} a < -2, 30 < a \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ a = -2, 30 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ -2 < a < 30 \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \end{cases}$$

となる。

(答) 前述

(3)

接点の x 座標を t とすると、接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ &= (3t^2 + 6t - 9)(x-t) + t^3 + 3t^2 - 9t + 3 \\ &= (3t^2 + 6t - 9)x - 2t^3 - 3t^2 + 3 \end{aligned}$$

となる。これが点 $(1, -10)$ を通るとき

$$\begin{aligned} -10 &= 3t^2 + 6t - 9 - 2t^3 - 3t^2 + 3 \\ \Leftrightarrow 2t^3 - 6t - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(t-2)(t+1)^2 &= 0 \\ \therefore t &= -1, 2 \end{aligned}$$

となる。したがって接点の x 座標が正の整数となるのは $t = 2$ のときであり、このとき接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 9)x - 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 3 \\ &= 15x - 25 \end{aligned}$$

となる。

(答) $y = 15x - 25$

(4)

接点の x 座標を u とすると、接線の方程式は $y = (3u^2 + 6u - 9)x - 2u^3 - 3u^2 + 3$ となる。これが点 (s, t) を通るとき

$$\begin{aligned} t &= (3u^2 + 6u - 9)s - 2u^3 - 3u^2 + 3 \\ \Leftrightarrow 2u^3 + 3(1-s)u^2 - 6su + 9s + t - 3 &= 0 \end{aligned}$$

となる。この左辺を u の関数とみて $g(u)$ とおく。ここで、3次関数の接点の個数と接線の本数は一致するため、点 (s, t) から $f(x)$ に異なる3本の接線が引けるための条件は u の方程式 $g(u) = 0$ が異なる3つの実数解を持つことである。すなわち、 $g(u)$ が極大値、極小値を持ちそれらが異符号、つまり積が負となればよい。

$$\begin{aligned} g'(u) &= 6u^2 + 6(1-s)u - 6s \\ &= 6(u+1)(u-s) \end{aligned}$$

より、 $g'(u) = 0$ は異なる2つの実数解を持つから、 $s \neq -1$ であり、このとき求める条件は

$$\begin{aligned} g(-1)g(s) &< 0 \\ \Leftrightarrow \{-2 + 3(1-s) + 6s + 9s + t - 3\} \{2s^3 + 3(1-s)s^2 - 6s^2 + 9s + t - 3\} &< 0 \\ \Leftrightarrow (12s + t - 2)(-s^3 - 3s^2 + 9s + t - 3) &< 0 \end{aligned}$$

となる。これは

$$\begin{cases} 12s + t - 2 > 0 \text{ かつ } -s^3 - 3s^2 + 9s + t - 3 < 0 \\ \text{もしくは} \\ 12s + t - 2 < 0 \text{ かつ } -s^3 - 3s^2 + 9s + t - 3 > 0 \end{cases}$$

となり、すなわち

$$\begin{cases} -12s + 2 < t < s^3 + 3s^2 - 9s + 3 \\ \text{もしくは} \\ s^3 + 3s^2 - 9s + 3 < t < -12s + 2 \end{cases}$$

である。ここで

$$\begin{aligned} s^3 + 3s^2 - 9s + 3 - (-12s + 2) &= s^3 + 3s^2 + 3s + 1 \\ &= (s+1)^3 \end{aligned}$$

より

$$\begin{cases} s < -1 \text{ のとき} & s^3 + 3s^2 - 9s + 3 < -12s + 2 \\ s > -1 \text{ のとき} & s^3 + 3s^2 - 9s + 3 > -12s + 2 \end{cases}$$

であるため、求める条件は

$$\begin{cases} s < -1, s^3 + 3s^2 - 9s + 3 < t < -12s + 2 \\ s > -1, -12s + 2 < t < s^3 + 3s^2 - 9s + 3 \end{cases}$$

となる。

(答) 前述