

数 学

注 意

1. 問題は全部で5題あり、冊子は計算用の余白もあわせて12ページである。
2. 解答用紙に氏名・受験番号を忘れずに記入すること。（ただし、マーク・シートにはあらかじめ受験番号がプリントされている。）
3. 解答はすべて解答用紙の指定された欄に記入すること。指定の欄以外に記入されたものは採点の対象としない。
4. 問題3，4，5の解答については、論述なしで結果だけ記しても、正解とは見なさない。
5. 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはならない。
6. 解答用紙はすべて必ず提出すること。問題冊子は持ち帰ってよい。

マーク・シート記入上の注意については、この問題冊子の裏表紙に記載されているので試験開始までに確認すること。ただし、冊子を開いてはならない。

マーク・シート記入上の注意

- 1 解答は、解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークすること。
- 2 問題の文中の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ などには、特に指示がないかぎり、符号(－), 数字(0～9)又は文字(a～d)が入る。1, 2, 3, … の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応する。それらを解答用紙の1, 2, 3, … で示された解答欄にマークして答えよ。

例 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ に -83 と答えたいとき

1	☒	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9	☐ a	☐ b	☐ c	☐ d	☐ *
2	☐ －	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☒	☐ 9	☐ a	☐ b	☐ c	☐ d	☐ *
3	☐ －	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☒	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9	☐ a	☐ b	☐ c	☐ d	☐ *

なお、同一の問題文中に $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ などが2度以上現れる場合、2度目以降は、 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ のように細字で表記する。

- 3 分数形で解答する場合、分数の符号は分子につけ、分母につけてはいけない。

例えば、 $\frac{\boxed{4}\boxed{5}}{\boxed{6}}$ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは、 $\frac{-4}{5}$ として答えよ。

また、それ以上約分できない形で答えること。

例えば、 $\frac{3}{4}$ と答えるところを、 $\frac{6}{8}$ のように答えてはいけない。

- 4 根号あるいは対数を含む形で解答する場合は、根号の中や真数に現れる自然数が最小となる形で答えよ。

例えば、 $\boxed{7}\sqrt{\boxed{8}}$ に $4\sqrt{2}$ と答えるところを、 $2\sqrt{8}$ のように答えてはいけない。また、 $\boxed{9}\log_2\boxed{10}$ に $6\log_2 3$ と答えるところを、 $3\log_2 9$ のように答えてはいけない。

- 5 分数形で根号を含む形で解答する場合、 $\frac{\boxed{11} + \boxed{12}\sqrt{\boxed{13}}}{\boxed{14}}$ に $\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}$

と答えるところを、 $\frac{6 + 4\sqrt{2}}{4}$ や $\frac{6 + 2\sqrt{8}}{4}$ のように答えてはいけない。

〔計 算 用 余 白〕

〔計算用余白〕

1 解答を解答用紙(その1)に記入せよ.

座標空間の3点 $A(0, 1, 2)$, $B(3, -2, 2)$, $C(-1, 4, 1)$ が定める平面を α とする. 原点 O から平面 α に垂線を下ろし, α との交点を H とする.

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$

1	2	3
---	---	---

(2) $\triangle ABC$ の面積は $\frac{\begin{matrix} \boxed{4} \end{matrix} \sqrt{\begin{matrix} \boxed{5} \end{matrix}}}{\begin{matrix} \boxed{6} \end{matrix}}$ である.

(3) $\overrightarrow{AH} = \frac{\begin{matrix} \boxed{7} \end{matrix}}{\begin{matrix} \boxed{8} & \boxed{9} \end{matrix}} \overrightarrow{AB} + \frac{\begin{matrix} \boxed{10} \end{matrix}}{\begin{matrix} \boxed{11} \end{matrix}} \overrightarrow{AC}, \quad OH = \frac{\begin{matrix} \boxed{12} \end{matrix} \sqrt{\begin{matrix} \boxed{13} \end{matrix}}}{\begin{matrix} \boxed{14} \end{matrix}}$

(4) 四面体 $OHBC$ の体積は $\frac{\begin{matrix} \boxed{15} & \boxed{16} \end{matrix}}{\begin{matrix} \boxed{17} & \boxed{18} \end{matrix}}$ である.

〔計 算 用 余 白〕

2 解答を解答用紙(その1)に記入せよ.

白石と黒石を手元にたくさん用意する. 表が白色, 裏が黒色の硬貨1枚を用いて, 机の上で以下の操作を繰り返し行う. ただし, 最初の操作は机の上に石が1個もない状態から始めるものとする.

操作: 硬貨を投げ, 出た色と異なる色の石が机の上にあればその中の1個を取り除き, なければ出た色と同じ色の石を手元から机の上に1個置く.

とくに, 机の上に石が1個もなければ, 次の回の操作では出た色と同じ色の石を手元から机の上に1個置く.

(1) 3回目の操作後に机の上に石がちょうど3個ある確率は $\frac{\boxed{19}}{\boxed{20}}$ である.

(2) 6回目の操作後に机の上に石がちょうど2個ある確率は $\frac{\begin{array}{|c|c|} \hline 21 & 22 \\ \hline 23 & 24 \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline 23 & 24 \\ \hline 23 & 24 \\ \hline \end{array}}$ で

あり, 石が1個もない確率は $\frac{\boxed{25}}{\begin{array}{|c|c|} \hline 26 & 27 \\ \hline 26 & 27 \\ \hline \end{array}}$ である.

(3) 6回目の操作後に机の上にある石が2個以下であったときに, 8回目の操作

後に机の上にある石も2個以下である条件付き確率は $\frac{\begin{array}{|c|c|} \hline 28 & 29 \\ \hline 30 & 31 \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline 28 & 29 \\ \hline 30 & 31 \\ \hline \end{array}}$ である.

〔計 算 用 余 白〕

3 解答を解答用紙(その2)の **3** 欄に記入せよ.

点 O を原点とする xy 平面上の放物線

$$y = -x^2 + 4x$$

を C とする. また, 放物線 C 上に点 $A(4, 0)$, $P(p, -p^2 + 4p)$,
 $Q(q, -q^2 + 4q)$ をとる. ただし, $0 < p < q < 4$ とする.

- (1) 放物線 C の接線のうち, 直線 AP と傾きが等しいものを ℓ とする. 接線 ℓ の方程式を求めよ.
- (2) 点 P を固定する. 点 Q が $p < q < 4$ を満たしながら動くとき, 四角形 $OAQP$ の面積の最大値を p を用いて表せ.
- (3) (2) で求めた四角形 $OAQP$ の面積の最大値を $S(p)$ とおく. $0 < p < 4$ のとき, 関数 $S(p)$ の最大値を求めよ.

〔計算用余白〕

4 解答を解答用紙(その3)の **4** 欄に記入せよ.

(1) 関数

$$y = -\frac{\cos 3x}{\sin^3 x} \quad (0 < x < \pi)$$

の増減と極値を調べ、そのグラフの概形を描け。ただし、グラフの凹凸は調べなくてよい。

(2) a を実数の定数とする。 x についての方程式

$$-\cos 3x = a \sin^3 x$$

が $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3}$ の範囲に実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

〔計算用余白〕

5 解答を解答用紙(その4)の **5** 欄に記入せよ.

$$a_n = \frac{1}{n!} \int_1^e (\log x)^n dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \text{ とおく.}$$

(1) a_1 を求めよ.

(2) 不等式 $0 \leq a_n \leq \frac{e-1}{n!}$ が成り立つことを示せ.

(3) $n \geq 2$ のとき, $a_n = \frac{e}{n!} - a_{n-1}$ であることを示せ.

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ を求めよ.

〔計算用余白〕

