

【解答】

(1)	1	2	3				
	2	7	8				
(2)	4	5	6	7	8	9	10
	3	2	4	3	4	3	3
(3)	11	12	13	14	15	16	
	1	2	7	2	7	2	

【解説】

(1)

$216 = 6^3$ であることから,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{216}\right)^{\log_6 \frac{2}{3}} &= 6^{-3 \log_6 \frac{2}{3}} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \\ &= \frac{27}{8}\end{aligned}$$

と求められる。

(2)

真数条件より, $x > 0, y > 0$ である。また,

$$\begin{aligned}\log_2 x + \log_2 (4y) &= 6 \\ \Leftrightarrow \log_2 xy &= 4 \\ \therefore xy &= 16\end{aligned}$$

である。ここで, $x > 0, y > 0$ であることから, $\frac{3}{x} > 0, \frac{1}{y} > 0$ であり, 相加平均・相乗平均の関係より,

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{3}{xy}} = 2\sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。等号は $\frac{3}{x} = \frac{1}{y}$ つまり $x = 3y$ のとき成り立つ。 $xy = 16$ に $x = 3y$ を代入すると

$$\begin{aligned}xy &= 16 \\ \Leftrightarrow 3y^2 &= 16 \\ \therefore y &= \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad (\because y > 0)\end{aligned}$$

となり, $x = 3y$ より $x = 4\sqrt{3}$ となる。以上のことから, $x = 4\sqrt{3}, y = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ のとき最小値 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ をとることがわかる。

(3)

与式 $\log_2 x - \log_4 \frac{1}{y}$ は,

$$\begin{aligned}\log_2 x - \log_4 \frac{1}{y} &= \log_2 x + \log_4 y \\ &= \log_2 x + \frac{\log_2 y}{\log_2 4} \\ &= \frac{1}{2} \log_2 x^2 y\end{aligned}$$

と変形できる。底 $2 > 1$ より, $x^2 y$ が最大となるとき, $\log_2 x - \log_4 \frac{1}{y}$ は最大となる。

$x > 0, y > 0$ であることから, $\frac{x^2}{4} > 0, \frac{y}{7} > 0$ であり, 相加平均・相乗平均の関係より,

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{4} + \frac{y}{7} &\geq 2\sqrt{\frac{x^2}{4} \cdot \frac{y}{7}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2 y}{7}} &\leq 1 \quad \left(\because \frac{x^2}{4} + \frac{y}{7} = 1\right) \\ \therefore x^2 y &\leq 7\end{aligned}$$

となる。等号は $\frac{x^2}{4} = \frac{y}{7} = \frac{1}{2}$ のとき, すなわち $x = \sqrt{2}, y = \frac{7}{2}$ のとき成り立つ。以上のことか

ら, $x = \sqrt{2}, y = \frac{7}{2}$ のとき最大値 $\frac{1}{2} \log_2 7$ をとることがわかる。

Ⅱ

〔解答〕

(1)	17	18		
	1	2		
(2)	19	20		
	7	3		
(3)	21			
	7			
(4)	22	23	24	
	7	1	1	

〔解説〕

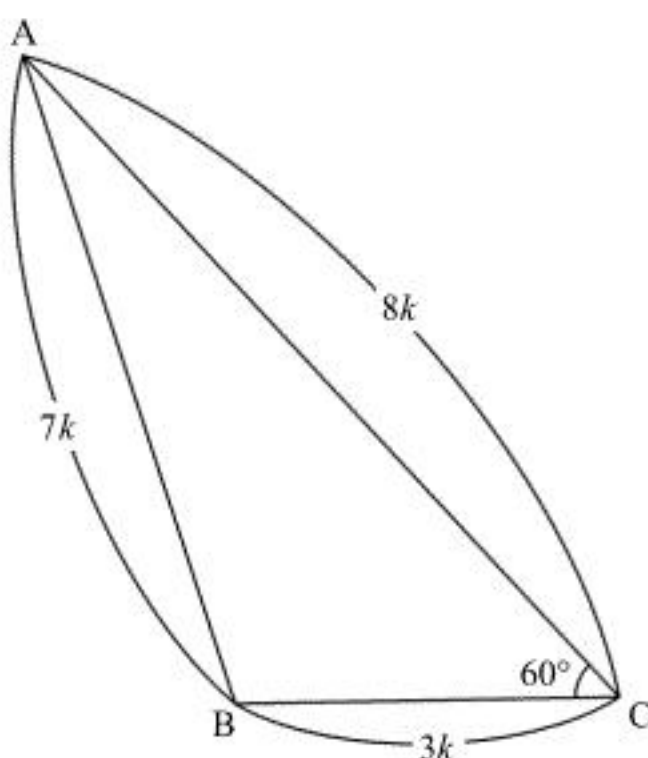
(1)

$AB:BC:CA=7:3:8$ であることから、正の実数 k を用いて $AB=7k$, $BC=3k$, $CA=8k$ とおける。このとき、 $\triangle ABC$ において余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos \angle ACB &= \frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{2 \cdot BC \cdot CA} \\ &= \frac{(3k)^2 + (8k)^2 - (7k)^2}{2 \cdot 3k \cdot 8k} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

と求められる。

(2)



(1)より $\cos \angle ACB = \frac{1}{2}$ であることから、 $\angle ACB = 60^\circ$, $\sin \angle ACB = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。 $\triangle ABC$ の面積が $18\sqrt{3}$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot BC \cdot CA \cdot \sin \angle ACB &= 18\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow 6\sqrt{3}k^2 &= 18\sqrt{3} \\ \therefore k &= \sqrt{3} \quad (\because k > 0)\end{aligned}$$

が成り立つ。よって、 $AB=7\sqrt{3}$ と求められる。

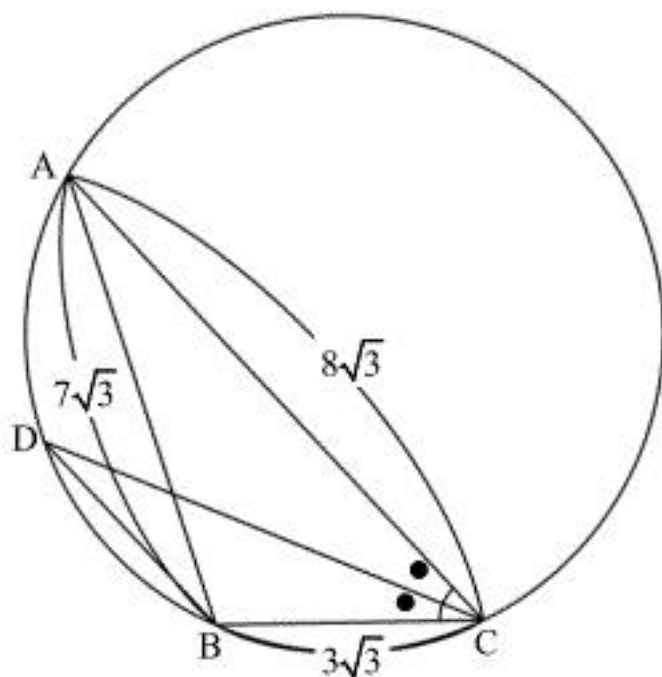
(3)

(2)より $AB=7\sqrt{3}$ であることから、 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると、 $\triangle ABC$ において正弦定理より

$$\begin{aligned}\frac{AB}{\sin \angle ACB} &= 2R \\ \Leftrightarrow R &= 7\end{aligned}$$

と求められる。

(4)



(2)より $\angle BCD = 30^\circ$ であり、(3)より $\triangle BCD$ の外接円の半径は 7 であることから、 $\triangle BCD$ において正弦定理より

$$\begin{aligned}\frac{BD}{\sin \angle BCD} &= 2R \\ \Leftrightarrow BD &= 14 \sin 30^\circ \\ \therefore BD &= 7\end{aligned}$$

と求められる。また、 $\triangle BCD$ において余弦定理より

$$\begin{aligned}BD^2 &= BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos \angle BCD \\ \Leftrightarrow CD^2 - 9CD - 22 &= 0 \\ \Leftrightarrow (CD - 11)(CD + 2) &= 0 \\ \therefore CD &= 11\end{aligned}$$

と求められる。

〔解答〕

(1)	25	26		
	4	2		
(2)	27	28	29	30
	-	4	4	2
(3)	31	32	33	
	3	4	9	

〔解説〕

(1)

点Aと点Pは一致することから $\overrightarrow{PC} = (-2, 2, 1)$ であり、点Qは直線PC上の点であることから実数 s を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{PC} \\ &= (-2s+2, 2s+4, s+1)\end{aligned}$$

と表せる。ここで、点Qは xy 平面上に存在することから、点Qの z 座標は0である。以上のことから、

$$\begin{aligned}s+1 &= 0 \\ \Leftrightarrow s &= -1\end{aligned}$$

が成り立ち、点Qの座標は $(4, 2, 0)$ であることがわかる。

(2)

点Pは線分AB上の点であることから、 $0 \leq t \leq 1$ を満たす実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \\ &= (2-4t, 4, 1)\end{aligned}$$

と表せる。また、点Qは直線PC上の点であることから実数 u を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OC} + u\overrightarrow{CP} \\ &= (2u-4tu, -2u+6, -u+2)\end{aligned}$$

と表せる。ここで、点Qは xy 平面上に存在することから、点Qの z 座標は0である。以上のことから、

$$\begin{aligned}-u+2 &= 0 \\ \Leftrightarrow u &= 2\end{aligned}$$

が成り立ち、点Qの座標は $(4-8t, 2, 0)$ であることがわかる。ここで、 $0 \leq t \leq 1$ であることから、 $-4 \leq x \leq 4$ となる。

(3)

点Qの x 座標を q とおく。このとき、(2)より $\overrightarrow{AQ} = (q-2, -2, -1)$, $\overrightarrow{CQ} = (q, -4, -2)$ であることから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{CQ} &= q^2 - 2q + 10 \\ &= (q-1)^2 + 9\end{aligned}$$

となる。(2)より $-4 \leq q \leq 4$ であることから、 $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{CQ}$ は $q=1$ のとき最小値9、 $q=-4$ のとき最大値34をとることがわかる。

IV

【解答】

(1)	34	35	36	37
	－	1	2	3
(2)	38	39	40	41
	－	3	9	2
(3)	42	43	44	45
	6	1	1	2

【解説】

(1)

$y' = x$ であり、点Pの座標は $(2, 2)$ であることから点Pにおける放物線Cの接線の傾きは2である。このことから法線 ℓ の傾きは $-\frac{1}{2}$ であり、法線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y - 2 &= -\frac{1}{2}(x - 2) \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{1}{2}x + 3 \end{aligned}$$

と求められる。

(2)

$y' = x$ であり、点Qの座標は $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ であることから点Qにおける放物線Cの接線の傾きは1である。このことから法線 m の傾きは -1 であり、法線 m の方程式は

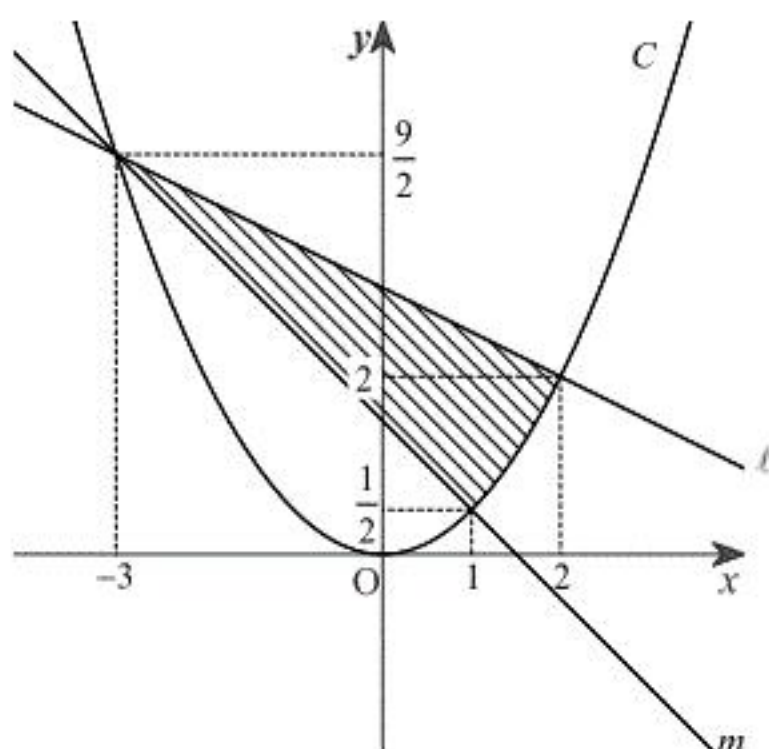
$$\begin{aligned} y - \frac{1}{2} &= -(x - 1) \\ \Leftrightarrow y &= -x + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

と求められる。よって、これらのことから直線 ℓ, m の交点は

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y = -x + \frac{3}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} -\frac{1}{2}x + 3 = -x + \frac{3}{2} \\ y = -x + \frac{3}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x = -3 \\ y = \frac{9}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

と求められる。

(3)



求める面積は上図の斜線部分の面積である。点 $\left(-3, \frac{9}{2}\right)$ は放物線C上の点でもあるから、求める面積は、

$$\begin{aligned} &\int_{-3}^2 \left(-\frac{1}{2}x + 3 - \frac{1}{2}x^2 \right) dx - \int_{-3}^1 \left(-x + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-3}^2 (x+3)(x-2) dx + \frac{1}{2} \int_{-3}^1 (x+3)(x-1) dx \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \{2 - (-3)\}^3 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \{1 - (-3)\}^3 \\ &= \frac{125 - 64}{12} \\ &= \frac{61}{12} \end{aligned}$$

となる。